

روشی برای تحلیل حساسیت و اصلاح فرکانسهای ارتعاشی سازه‌های برشی (سیستم جرم و فنر متوالی)

محمد رضا تابش پور
tabeshpour@sharif.ir

چکیده

تعیین میزان حساسیت خصوصیات ارتعاشی (فرکانس ها و اشکال مودی) یک سیستم مکانیکی نسبت به تغییر در پارامترهای سازه‌ای آن (جرم و سختی) از اهمیت خاصی برخوردار می باشد. روشهای اولیه ارائه شده در این زمینه، بر مبنای آنالیز حساسیت مرتبه اول بوده است. ولی بعلت وجود محدودیت های زیاد در کاربرد آنها، مطالعات گسترده ای برای ارائه روشهای مؤثر و جامع دیگری در این زمینه بعمل آمده است. از جمله این روشها میتوان به روش آنالیز حساسیت مرتبه دوم اشاره نمود. این روشهای تقریبی فقط برای تغییرات سازه‌ای اندک قابل استفاده می باشند. در این مقاله یک روش جدید برای به هنگام نمودن فرکانس ارتعاشی سیستم های برشی ارائه شده است. این روش در مقایسه با روش های پیشنهادی دیگر، ساده تر بوده و زمان محاسبه کمتری نیاز دارد. روش مزبور به صورت تکراری بوده و هر یک از فرکانس های ارتعاشی را می توان تا دقت مطلوب، اصلاح کرد. با توجه به اهمیت تنظیم خصوصیات سازه های برشی در کنترل پاسخ آنها تحت اثر بارهای خارجی، خصوصا بار ناشی از زلزله، روش حاضر می تواند به نحو مؤثری در اصلاح فرکانس های سیستم عمل کند. عملکرد روش پیشنهادی با استفاده از چند مثال عددی مورد بررسی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: آنالیز حساسیت، به هنگام نمودن فرکانس، روش های تقریبی، روش تکراری، سیستم برشی

۱- مقدمه

بهنگام نمودن خواص ارتعاشی سیستم های سازه ای، کاربرد زیادی در تحلیل، طراحی و بهینه سازی سازه ها دارد. تعیین و ارائه روابطی برای مرتبط ساختن میزان تغییرات سازه ای با فرکانس ها و اشکال مودی ویا برعکس، از نتایج این مطالعات می باشد. اگر هدف انتقال برخی از فرکانس های ارتعاشی سیستم به مقادیر از پیش تعیین شده ای باشد، باید دربرخی از المانهای سازه ای تغییراتی صورت گیرد. در این حین، سایر فرکانس های سیستم نیز تحت تأثیر این تغییرات سازه ای قرار گرفته و مجموعه جدیدی از فرکانس ها و مود های ارتعاشی ایجاد خواهند شد. به منظور تعیین مقادیر جدید فرکانس ها و اشکال مودی میتوان از این روشها استفاده کرد.

ایجاد تغییرات مورد نیاز در مشخصه های جرم، سختی و یا هر دوی آنها برای رسیدن به یک مجموعه فرکانسی مورد نظر منجر به ابداع و ارائه روش های متنوعی گردیده است. در این خصوص می توان به تصحیح بهینه هر دو ماتریس جرم و سختی توسط باروچ (۱۹۸۲) اشاره نمود [۱]. اثر برهمکنش تصحیح ماتریس جرم و سختی توسط وی (۱۹۸۹) بررسی شده است [۲]. برمن (۱۹۷۹) ماتریس جرم را اصلاح کرد [۳]. میناز و اینمن (۱۹۹۰) با استفاده از روش های تخمین پارامتر مودی با در نظر گرفتن میرایی کلاسیک، روشی را برای انطباق داده های آزمایشگاهی بر مدل المان محدود ارائه کرده اند [۴]. برخی از محققان روش اغتشاش ماتریسی را مورد استفاده قرار داده اند [۵-۸]. برمن (۱۹۹۵) مساله تعدد و چندگانگی جوابهای ممکن را بررسی کرد [۹]. لین و لیم (۱۹۹۷) روش بهبود یافته ای به منظور آنالیز حساسیت معکوس مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ارائه کردند. روش آنها بر مبنای آنالیز حساسیت مرتبه اول استوار بوده و برای سیستم های نامیرا قابل استفاده است. آنها مساله یگانگی جوابهای روش مربوطه را نیز بررسی کرده و ملاحظات لازم در مورد کاربردهای عملی این روش را مورد بحث قرار دادند [۱۰]. الدرد و همکارانش (۱۹۹۲) یک روش گام به گام بر مبنای اغتشاش مراتب بالاتر را ارائه نموده اند [۱۱]. در این روش می توان به هر دقت دلخواه با افزایش تعداد گام ها دست یافت.

سویی و بی (۱۹۸۹) روشی برای مطالعه پارامتریک فرکانس ها و اشکال مودی در یک سیستم مکانیکی ارائه کرده اند [۱۲]. روش آنها بر پایه پاسخ نیروی سیستم اولیه می باشد. این روش امکان انتقال فرکانس ها به یک مقدار دلخواه را فراهم می کند. هدف آنها تعیین میزان تغییرات لازم در هر یک از پارامتر های جرم و یا سختی سیستم می باشد، به نحوی که هر یک از فرکانس های اصلی را بتوان به یک مقدار دلخواه انتقال داد. در مطالعه ای دیگر آنها اثر میرایی را نیز مورد مطالعه قرار دادند [۱۳]. از جمله نکات مورد نظر آنها این بود که وقتی یکی از فرکانس های ارتعاشی سیستم ضمن اعمال تغییر در مشخصه های جرم و یا سختی سازه به مقداری دلخواه رسید، بقیه

فرکانسها چه تغییری می کنند؟ برای پاسخ به این سؤال، آنها استفاده از نمودارهایی که میزان تغییرات سازه ای را برحسب هر یک از فرکانس ها تعیین نموده و به کمک آن می توان میزان تغییر لازم در هر مشخصه مورد نظر سازه ای به منظور رسیدن به فرکانس دلخواه را تعیین نمود، را پیشنهاد نمودند. به این صورت با معلوم بودن میزان تغییر خواص مکانیکی، مقدار جدید سایر فرکانسها نیز قابل تعیین خواهد بود. این روش علیرغم کارایی، وقت گیر و غیر اقتصادی می باشد.

روشهای دقیق ارائه شده برای این منظور اغلب بصورت فرایندی تکراری می باشد [۱۷-۱۴]. در صورت محدود فرض نمودن میزان تغییرات سازه ای، روشهای تقریبی برای این منظور جایگزین مناسب تری خواهند بود. ساده ترین روش برای تعیین حساسیت مقدار فرکانس ها و اشکال مودی به تغییرات اعمالی در المان های سازه ای، استفاده از روش آنالیز حساسیت مرتبه اول می باشد [۱۹-۱۸]. علیرغم مناسب بودن این روش برای تغییرات کوچک در اجزاء سازه ای، محدودیت هایی در استفاده از آن وجود دارد. این روش برای دامنه زیاد تغییرات در مشخصات سازه ای عملکرد خوبی نداشته و از طرفی تعیین محدوده تغییرات کوچک برای رسیدن به دقت بالا نیز کار مشکلی است. برخی از محققان به منظور به هنگام کردن خواص ارتعاشی سیستم های مکانیکی از روش نسبت رایلی استفاده کرده اند [۲۰]. در این خصوص، کیم روشی برای بالا بردن دقت آنالیز حساسیت مرتبه اول ارائه کرده است [۲۱]. یکی دیگر از راههای بالا بردن دقت، استفاده از آنالیز حساسیت مرتبه دوم می باشد. با استفاده از روش نلسون الگوریتم هایی به منظور در نظر گرفتن مشتقات مرتبه اول و دوم برای ماتریس های جرم و سختی ارائه شده است [۲۵-۲۲]. ساتر و همکارانش مقایسه ای بین روش های تفاضل محدود، آنالیز حساسیت مرتبه اول، آنالیز حساسیت اصلاح شده و روش نلسون انجام دادند [۲۷-۲۶]. آنها نتیجه گرفتند که همواره روش اصلاح شده آنالیز حساسیت از روش آنالیز حساسیت مرتبه اول سریع تر همگرا می شود. همچنین هنگامی که مشتق چهار مود اول برای تخمین شکل مودی در نظر گرفته شود، روش نلسون بهتر از تفاضل محدود عمل می کند.

در مطالعه انجام شده روش جدیدی برای به هنگام نمودن فرکانس های ارتعاشی سیستم های برشی ارائه شده است. در این روش با فرض معلوم بودن فرکانس ها و اشکال مودی سیستم اولیه و میزان تغییر اعمال شده در المان های سازه ای می توان با استفاده از یک روش گام به گام هریک از فرکانس های دیگر را با دقت دلخواه تعیین نمود. این روش می تواند برای اهداف مختلفی چون طراحی، بهینه سازی و ... بکار رود. در ادامه ضمن تشریح آنالیز های حساسیت مرتبه اول و دوم به ارائه فرمولاسیون مورد نظر در این مطالعه اقدام میگردد.

۲- آنالیز حساسیت مرتبه اول برای فرکانس

مشخصه ارتعاشی y از یک سازه، تابعی از پارامترهای فیزیکی x_i (از قبیل جرم، سختی، میرایی، داده های سازه ای و ...) سازه می باشد. حساسیت نسبی y نسبت به x_i ($i = 1, 2, \dots, m$) بصورت زیر تعریف می گردد [۱۷]:

$$S[y | x_i] = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x_i / x_i} = \frac{x_i}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_i} \quad (۱)$$

معادله بالا، مربوط به حساسیت های نرمال شده مرتبه اول می باشد. معادله دیفرانسیل حرکت برای یک سیستم دینامیکی نامیرا با جرم متمرکز، به شکل زیر است:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (۲)$$

که در آن $\{f\}$ بردار نیروی تحریک خارجی می باشد. با توجه به آنکه ماتریس های جرم $[M]$ و سختی $[K]$ متقارن هستند، آنگاه:

$$[K]\{\phi\}_r = \lambda_r [M]\{\phi\}_r \quad (۳)$$

$$(\phi)_r^T [K] = \lambda_r (\phi)_r^T [M]$$

$$(\omega)[\Phi]^T [M][\Phi] = [I]$$

$$(\omega)[\Phi]^T [K][\Phi] = [\Lambda]$$

$[\Phi]$ ماتریس مودی، $[I]$ ماتریس واحد و $[\Lambda]$ ماتریس قطری شامل مقادیر ویژه سیستم، λ_r و $\{\phi\}_r$ به ترتیب r امین مقدار ویژه و بردار ویژه مربوطه می باشند. اگر فرض شود P_i یک پارامتر سازه ای از سیستم باشد، با توجه به $\lambda_r = \omega_r^2$ ، ω_r ، r امین فرکانس زاویه ای طبیعی سیستم) می توان حساسیت نسبی فرکانس طبیعی را نسبت به P_i به شرح زیر بدست آورد [۱۷]:

$$S[\omega_r | P_i] = \frac{P_i}{2\omega_r^2} \{\phi\}_r^T \left[\frac{\partial [K]}{\partial P_i} - \omega_r^2 \frac{\partial [M]}{\partial P_i} \right] \{\phi\}_r \quad (۷)$$

حساسیت های بیان شده در بالا، حساسیت های نرمال شده مرتبه اول می باشند. کار محاسباتی مهم در معادلات فوق محاسبه $\frac{\partial [M]}{\partial P_i}$ و

$\frac{\partial [K]}{\partial P_i}$ است. اگر سیستم شامل المانهایی باشد که سختی و جرم آنها با P_i متناسب باشند، آنگاه مقدار این مشتقات، ثابت خواهند بود. همانطور که گفته شد، روش آنالیز حساسیت مرتبه اول فقط در محدوده تغییرات کوچک در خصوصیات اجزاء سازه ای دارای دقت خوبی می باشد. لذا تحقیقات زیادی به منظور ابداع روش های دقیق تر و رفع این محدودیت صورت گرفته است. از جمله می توان به آنالیز حساسیت مرتبه دوم اشاره نمود.

۳- آنالیز حساسیت مرتبه دوم

کائو و ملجنک روش آنالیز حساسیت مرتبه دوم را مطرح نموده اند [۲۲]. در اینجا دو روش برای آنالیز حساسیت مرتبه دوم ارائه شده است. روش اول بر اساس روش نلسون می باشد که بر اساس تعیین مشتقات مرتبه اول بردارهای ویژه است. در روش دوم از مفهوم شبه معکوس یا معکوس تعمیم یافته (Generalized Inverse) استفاده شده که جامعیت بیشتری دارد.

۳-۱- روش اول

ابتدا به منظور سهولت، روابط زیر تعریف می شوند:

$$\frac{\partial [M]}{\partial P_i} = [M'] , \quad \frac{\partial [K]}{\partial P_i} = [K'] , \quad \frac{\partial \lambda_r}{\partial P_i} = \lambda'_r \quad (۸)$$

با دوبار مشتق گرفتن از معادله (۴) می توان مشتق دوم مقادیر ویژه را بصورت زیر بدست آورد:

$$\lambda''_r = \{\phi\}_r^T ([K''] - \lambda'_r [M'] - \lambda_r [M'']) \{\phi\}_r \quad (۹)$$

$$+ 2\{\phi\}_r^T ([K'] - \lambda_r [M']) \{\phi\}_r$$

همچنین:

$$([K] - \lambda_r [M]) \{\phi\}_r = (\lambda''_r + 2\lambda'_r [M'] + \lambda_r [M''] - [K'']) \{\phi\}_r \quad (۱۰)$$

$$+ 2(\lambda'_r [M] + \lambda_r [M'] - [K']) \{\phi\}_r$$

مقادیر مشتقات اشکال مودی با استفاده از روش نلسون قابل محاسبه می باشند.

۳-۲- روش دوم

این روش بر اساس معکوس تعمیم یافته قرار دارد. نشان داده شده است که برای هر ماتریس $A_{m \times n}$ یک ماتریس منحصر به فرد $A_{n \times m}^+$ وجود دارد به نحوی که روابط زیر برقرار باشند:

$$[A][A^+][A] = [A] , \quad [A^+][A][A^+] = [A^+] \quad (۱۱)$$

$$([A][A^+])^* = [A][A^+] , \quad ([A^+][A])^* = [A^+][A]$$

علامت ستاره بیانگر ترانهاده مزدوج ماتریس بوده و $[A^+]$ نیز معکوس تعمیم یافته می باشد. در حالت ویژه اگر $[A]$ ماتریس مربع و غیر منفرد باشد، آنگاه $A^+ = A^{-1}$ خواهد بود. روش معکوس تعمیم یافته می تواند در حل معادله خطی زیر استفاده شود:

$$[A]\{x\} = \{p\} \quad (۱۲)$$

جواب عمومی معادله بالا به صورت زیر است:

$$\{x\} = [A^+]\{p\} + ([I] - [A^+][A])\{z\} \quad (۱۳)$$

که $\{z\}$ می تواند هر بردار با ابعاد متناسب باشد. قسمت $([I] - [A^+][A])\{z\}$ حل همگن $[A]\{x\} = \{0\}$ می باشد. با توجه به معادله (۱۱)، ماتریس $[A^+][A]$ قطری بوده و جواب خصوصی $[A^+]\{p\}$ بر جواب همگن $([I] - [A^+][A])\{z\}$ عمود بوده و در نتیجه جوابی با کمترین نرم مربعات برای معادله (۱۲) خواهد بود. در اینجا روش بدست آوردن معکوس تعمیم یافته برای حالت خاص:

$$[A] = ([K] - \lambda_r [M]) \quad (۱۴)$$

مورد بررسی قرار می گیرد. در صورتی که ماتریس $[A]$ غیرمتقارن باشد، بردار ویژه $\{\phi\}_r$ با بردار ویژه ستونی راست $\{x\}_r$ و بردار ویژه سطری چپ $\{y\}_r$ تعویض می شود. این بردارهای ویژه دارای خاصیت زیر می باشند:

$$[A]\{x\}_r = \{0\} , \quad \{y\}_r [A] = \{0\}$$

$$[H(\omega)] = [\Phi][[\Lambda] - \omega^2[I]]^{-1}[\Phi] \quad (28)$$

می توان نوشت:

$$\{x\} = [H(\omega)]\{f\} \quad (29)$$

$[H(\omega)]$ تابع ماتریسی تبدیل فرکانس می باشد.

۵- معادلات سیستم دینامیکی اصلاح شده

در معادله (۱۸) اگر $\{f(t)\} = \{0\}$ باشد، معادله ارتعاش آزاد بدست می آید. اکنون اگر جرم یا سختی مقداری اصلاح شود، معادله مذکور به شکل زیر قابل ارائه می باشد:

$$(\Phi^0)([M] + [\delta M])\{\ddot{x}(t)\} + ([K] + [\delta K])\{x(t)\} = \{0\}$$

معادله بالا را می توان به صورت زیر در آورد:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = -[\delta M]\{\ddot{x}(t)\} - [\delta K]\{x(t)\} \quad (31)$$

اگر معادله فوق به صورت همگن در نظر گرفته شود، جواب آن هارمونیک بوده و به علت وجود $\{\ddot{x}\}$ ، $\{x\}$ در سمت راست، می توان گفت که رابطه بالا معادله حاکم بر سیستم دینامیکی تحت انگیزش هارمونیک می باشد. نیروی تحریک $\{f(x)\}$ برابر است با:

$$\{f(t)\} = -[\delta M]\{\ddot{x}(t)\} - [\delta K]\{x(t)\} = (\omega^2[\delta M] - [\delta K])\{x\}e^{i\omega t} \quad (32)$$

از معادلات (۲۴) و (۳۲) رابطه زیر قابل تعیین خواهد بود:

$$\{x\} = [\Phi][[\Lambda] - \omega^2[I]]^{-1}[\Phi]^T(\omega^2[\delta M] - [\delta K])\{x\} \quad (33)$$

با توجه به روابط (۲۵) و (۲۶) می توان معادله بالا را به صورت زیر نوشت:

$$\{x\} = [H(\omega)](\omega^2[\delta M] - [\delta K])\{x\} \quad (34)$$

بنابراین ارتعاش آزاد سیستم اصلاح شده را می توان به جای حل مستقیم معادله (۳۰) از حل معادله (۳۴) بدست آورد.

۶- تعیین ماتریس های $[\delta M]$ و $[\delta K]$

برای یک سیستم N درجه آزادی ماتریس قطری $[\delta M]$ و ماتریس متقارن $[\delta K]$ را می توان به شکل های زیر نوشت:

$$[\delta M] = \begin{bmatrix} \delta m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \delta m_N \end{bmatrix} \dots \quad (35)$$

$$[\delta K] = \begin{bmatrix} \delta k_{11} & \delta k_{12} & \dots & \delta k_{1N} \\ \delta k_{21} & \delta k_{22} & \dots & \delta k_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta k_{N1} & \delta k_{N2} & \dots & \delta k_{NN} \end{bmatrix} \quad (36)$$

درایه سطر r ام و ستون s ام از ماتریس بالا را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\delta k_{rs} = \sum_{p=1}^L a_{rs,p} \delta k_p \quad (37)$$

روابط فوق بیانگر این است که فضای سطر و ستونی $[A]$ ، به ترتیب برای $\{x\}_r$ و $\{y\}_r$ فضای متعامد مکمل می باشند. بر پایه این استدلال ماتریس غیرمفرد $[H]$ را می توان به صورت زیر تشکیل داد:

$$[H] = [A] + \alpha\{y\}_r^*\{x\}_r^* \quad (15)$$

که در آن α یک مقدار ثابت غیرصفر بوده و $\{y\}_r^*$ و $\{x\}_r^*$ ترانهاده مختلط بردار ویژه های نرمال چپ و راست می باشند. معکوس $[H]$ به صورت زیر قابل بیان است:

$$[H]^{-1} = [A^+] + \frac{1}{\alpha}\{x\}_r\{y\}_r \quad (16)$$

در حالتی که $[A]$ متقارن باشد می توان از تساویهای زیر استفاده کرد:

$$\{x\}_r = \{\phi\}_r, \quad \{y\}_r = \{\phi\}_r^T \quad (17)$$

از روی معادله (۱۶) ماتریس $[A^+]$ بدست می آید. اکنون می توان مشتقات اشکال مودی را محاسبه نمود [۲۲].

۴- پاسخ سیستم دینامیکی

معادله حرکت یک سیستم دینامیکی نامیرا تحت نیروی $f(t)$ بصورت زیر بیان می گردد [۱۲]:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{f(t)\} \quad (18)$$

معادله بالا را می توان با تابع تبدیل زیر در مختصات مودی نوشت:

$$\{x(t)\} = [\Phi]\{P(t)\} \quad (19)$$

با استفاده از تبدیل بالا معادله (۱۸) به شکل زیر در می آید:

$$[M][\Phi]\{\ddot{P}(t)\} + [K][\Phi]\{P(t)\} = \{f(t)\} \quad (20)$$

با ضرب معادله بالادر $[\Phi]^T$ از سمت چپ و جایگذاری روابط $[\Phi]^T[M][\Phi] = [I]$ و $[\Phi]^T[K][\Phi] = [\Lambda]$ رابطه زیر قابل تعیین است:

$$\{\ddot{P}(t)\} + [\Lambda]\{P(t)\} = [\Phi]^T\{f(t)\} [I] \quad (21)$$

اگر تحریک f دارای فرکانس ω باشد، معادله فوق در حوزه فرکانسی بصورت زیر خواهد بود:

$$(-\omega^2[I] + [\Lambda])\{P(t)\} = [\Phi]^T\{f(t)\} [I] \quad (22)$$

در نتیجه:

$$\{P(t)\} = ([\Lambda] - \omega^2[I])^{-1}[\Phi]^T\{f(t)\} \quad (23)$$

با جایگزینی معادله فوق در رابطه (۱۹) عبارت زیر حاصل می شود:

$$\{x(t)\} = [\Phi][[\Lambda] - \omega^2[I]]^{-1}[\Phi]^T\{f(t)\} \quad (24)$$

چون تحریک، هارمونیک فرض می شود، در نتیجه:

$$\{x(t)\} = \{x\}e^{i\omega t} \quad (25)$$

$$\{f(t)\} = \{f\}e^{i\omega t} \quad (26)$$

اکنون معادله (۲۴) به شکل زیر در می آید:

$$\{x\} = [\Phi][[\Lambda] - \omega^2[I]]^{-1}[\Phi]^T\{f\} \quad (27)$$

با تعریف:

$$\det[B] = 0 \quad (43)$$

در معادله بالا فقط دو متغیر ω_s و δk_p وجود دارد. فرکانس دلخواه ω_s را می توان مشخص کرده و از معادله بالا مقدار δk_p را بدست آورد. از آنجا که جواب معادله (43) منحصر به فرد نیست، باید مقدار واقعی و ممکن برای δk_p انتخاب گردد.

باید توجه کرد که اگر فرکانس طبیعی یک مود به طور تدریجی در گام های $\delta\omega$ به سمت ω_s میل کند، انتظار می رود که مقدار δk نیز به تدریج زیاد گردد. با توجه به این نکته انتخاب δk متناسب، آسان می شود. به عنوان مثال اگر فرکانس r امین مود سیستم با تغییر در جرم و سختی به سمت ω_s میل کند ($\omega_s > \omega_r$) در آن صورت از معادله قبلی یک مقدار مثبت و یک مقدار منفی برای δk بدست خواهد آمد. باید مقدار δk مثبت را انتخاب کرد، برای اینکه با روند، کار و تئوری ارتعاش تطابق دارد. δk منفی مربوط به انتقال یک فرکانس بالاتر به سمت ω_s می باشد. انتخاب δk مثبت باعث افزایش ω_r (فرکانس طبیعی مود r ام) به ω_s شده و انتخاب δk منفی باعث کاهش ω_u (فرکانس طبیعی مود u ام) به ω_s می گردد ($\omega_u > \omega_s$).
به طور مشابه اگر تنها پارامتر متغیر جرم m_q باشد، با توجه به معادلات (34) و (39) رابطه زیر حاصل می شود:

$$\{x\} = \omega^2 [H(\omega)] [\delta M]_q \{x\} \quad (44)$$

با توجه به تعریف $[H(\omega)]$ معادله قبلی به شکل زیر در می آید:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{Bmatrix} H_{1q}(\omega) \\ H_{2q}(\omega) \\ \vdots \\ H_{Nq}(\omega) \end{Bmatrix} \delta m_q x_q \quad (45)$$

اگر سیستم اصلاح شده دارای فرکانس ω_s باشد، δm_q و ω_s باید در رابطه فوق صدق کنند، که از آنها بدست می آید:

$$x_q = \omega_s^2 H_{qq}(\omega_s) \delta m_q x_q \quad (46)$$

یا به عبارت دیگر:

$$\delta m_q = \frac{1}{\omega_s^2 H_{qq}(\omega_s)} \quad (47)$$

بنابراین اگر مقدار جرم از m_q به $m_q + \delta m_q$ برسد، آنگاه فرکانس ویژه سیستم برابر ω_s خواهد بود. در این حالت شکل مودی مربوطه را می توان از روی معادله (45) محاسبه نمود.

با در نظر گرفتن سیستم قاب برشی، روابط بالا به شکل های ساده تری تبدیل می شوند. در حالت اصلاح سختی k_1 داریم:

$$[\delta K]_{II} = \delta k_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

و با استفاده از معادله (42) نتیجه می شود:

$$\delta k_1 = \frac{-1}{H_{11}(\omega)} \quad (49)$$

و نیز در حالت اصلاح سختی k_q ($q > 1$):

δk_p : تغییر در سختی k_p بین دو گره.

δm_q : تغییر در جرم m_q در گره q .

L : تعداد کل سختی ها در سیستم.

$a_{r,s,p}$: ضریب سهم از δk_p برای تغییر در سختی بین گره های r و s .

برای سیستم دینامیکی که در آن فقط سختی مشخص k_p اصلاح شده است، ماتریس $[\delta K]$ به صورت زیر در می آید:

$$[\delta K] = [\delta K]_P = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{ii,p} \delta k_p & \dots & a_{ij,p} \delta k_p & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{ji,p} \delta k_p & \dots & a_{jj,p} \delta k_p & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

که سختی k_p بین دو گره i و j قرار دارد. به روش مشابه اگر فقط جرم m_q تغییر یابد. ماتریس $[\delta M]$ به صورت زیر در می آید:

$$[\delta M] = [\delta M]_q = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \delta m_q & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

7- اصلاح پارامترهای سختی و جرم برای رسیدن به فرکانس مطلوب

اگر مولفه های جرم یا سختی یک سیستم دچار تغییراتی گردند، فرکانس های آن نیز انتقال می یابند. اگر فقط سختی k_p تغییر کند معادله (34) به شکل زیر در می آید:

$$\{x\} = -[H(\omega)] [\delta K]_p \{x\} \quad (40)$$

یا:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{Bmatrix} = -\delta k_p \begin{bmatrix} H_{1i}(\omega)a_{ii,p} + H_{1j}(\omega)a_{ji,p} & H_{1i}(\omega)a_{ij,p} + H_{1j}(\omega)a_{ji,p} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ H_{Ni}(\omega)a_{ii,p} + H_{Nj}(\omega)a_{ji,p} & H_{Ni}(\omega)a_{ij,p} + H_{Nj}(\omega)a_{ji,p} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \end{Bmatrix} \quad (41)$$

اگر از بردار x_j فقط x_i و x_j نگه داشته شده و سیستم دینامیکی مورد نظر که در آن سختی المان P به اندازه δk_p اصلاح شده است، دارای فرکانس ω_s باشد، معادله بالا به شکل زیر تبدیل می گردد:

$$\begin{bmatrix} \delta k_p^{-1} + H_{ii}(\omega_s)a_{ii,p} + H_{ij}(\omega_s)a_{ji,p} & H_{ii}(\omega_s)a_{ij,p} + H_{ij}(\omega_s)a_{ji,p} \\ H_{ji}(\omega_s)a_{ii,p} + H_{jj}(\omega_s)a_{ji,p} & \delta k_p^{-1} + H_{jj}(\omega_s)a_{jj,p} + H_{ij}(\omega_s)a_{ji,p} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (42)$$

و یا:

$$[B] \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

معادله مشخصه سیستم اصلاح شده برای فرکانس ω_s به صورت زیر است:

۸-۲- اصلاح در ماتریس سختی

۸-۲-۱- ایجاد اصلاح در \mathbf{k}_1 : در صورت ایجاد تغییر در سختی k_1 رابطه (۴۹) بین فرکانس ها و میزان تغییر در این سختی برقرار خواهد بود. با جایگذاری معادله (۵۳) در (۴۹) به ازای $q=1$ ، رابطه زیر بدست می آید:

$$\sum_{j=1}^N \frac{\phi_{1j}^2}{\lambda_j - \lambda} + \frac{1}{\delta k_1} = 0 \quad (۵۶)$$

اکنون می توان رابطه برگشتی زیر را بدست آورد:

$$\lambda_i^{(n+1)} = \lambda_i + \frac{\phi_{1i}^2}{\delta k_1^{-1} + S_{1i}^{(n)}} \quad (۵۷)$$

$S_{1i}^{(n)}$ با توجه به معادله (۵۵) به ازای $q=1$ حاصل می شود.

۸-۲-۲- ایجاد اصلاح در \mathbf{k}_q ($q > 1$): در این حالت به طور مشابه و با توجه به معادلات (۵۱) و (۵۳) رابطه برگشتی زیر حاصل می شود:

$$\lambda_i^{(n+1)} = \frac{\lambda_i + (\phi_{(q-1)j} - \phi_{qj})^2}{\delta k_q^{-1} + S_{qi}^{(n)}} \quad (۵۸)$$

که در آن:

$$S_{qi}^{(n)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{(\phi_{(q-1)j} - \phi_{qj})^2}{\lambda_j - \lambda_i^{(n)}} \quad (۵۹)$$

با استفاده از معادلات (۵۴)، (۵۷) و (۵۸) می توان با معلوم بودن خواص ارتعاشی سیستم اولیه و مقدار اصلاح انجام شده در هر یک از پارامترهای سازه ای، نسبت به تعیین فرکانس های سیستم اصلاح شده اقدام نمود. در ادامه به بررسی اشکالات روشهای تقریبی برای به هنگام کردن خواص ارتعاشی سازه و ارائه روش جدید برای این منظور پرداخته می شود.

۹- مثال عددی

مدل سیستم برشی n درجه آزادی در شکل (۱) نشان داده شده است. به عنوان اولین مثال یک سازه سه درجه آزادی در نظر گرفته شده است. مقادیر جرم و سختی مربوطه در جدول (۱) آورده شده است. در شکل (۲) به ازای تغییرات ۲۰٪، ۵۰٪ و ۱۰۰٪ در سختی k_1 میزان تغییرات حاصله در فرکانس مودهای مختلف براساس دو روش مزبور با مقدار دقیق مقایسه شده اند. مقدار دقیق با در نظر گرفتن سازه اصلاح شده بدست آمده است. ملاحظه می شود که هر چه میزان تغییر در المانهای جرم این سیستم افزایش یابد، از مقدار دقت دو روش فوق کاسته می شود. همچنین نتایج نشان دهنده آن است که در تغییرات کم، هر دو روش به جوابهای نزدیکی منتهی می شوند. ولی علیرغم آنکه در تغییرات بالا دقت روش آنالیز حساسیت مرتبه دوم بالاتر است، ولی هنوز هم با مقدار دقیق، فاصله قابل ملاحظه ای دارد. در تغییرات بالا در اغلب مودها میزان خطای هر دو روش، نسبتاً زیاد است. با دقت در شکل (۲) می توان دریافت

$$[\delta K]_q = \delta k_q \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1_{(q-1)(q-1)} & -1_{(q-1)q} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -1_{q(q-1)} & 1_{qq} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (۵۰)$$

که بطور مشابه با استفاده از معادله (۴۲) داریم:

$$\delta k_q = \frac{1}{H_{(q-1)q} + H_{q(q-1)} - H_{(q-1)(q-1)} - H_{qq}} \quad (۵۱)$$

۸- ارائه روش جدید بهنگام کردن فرکانس ها

در اینجا روشی جدید برای بهنگام کردن فرکانس های ارتعاشی سیستم اصلاح شده ارائه می شود. هدف تعیین فرکانس های یک سیستم برشی نظیر شکل (۱) بعد از اعمال اصلاح δp_q در پارامتر سازه ای p_q (جرم یا سختی) می باشد. در این روش از فرکانس های ارتعاشی و اشکال مودی سیستم اولیه استفاده شده است. روش ارائه شده نیاز به زمان محاسبه کمی دارد. اکنون با در نظر گرفتن سه حالت زیر می توان، معادلات حاکم بر هر قسمت را استخراج کرد.

۸-۱- اصلاح در ماتریس جرم

اگر مطابق معادله (۳۹) فقط جرم q دچار تغییر گردد، رابطه (۴۷) بین فرکانس ها و میزان تغییر در جرم برقرار خواهد بود. در نتیجه ابتدا باید H_{qq} محاسبه گردد. از آنجا که $[J] = ([\Lambda] - \omega^2 [I])^{-1}$ یک ماتریس قطری می باشد در نتیجه خواهیم داشت:

$$J_{ii} = \frac{1}{\lambda_i - \lambda}, \quad \lambda = \omega^2 \quad (۵۲)$$

با توجه به تعریف H می توان نوشت:

$$H_{qq} = \sum_{j=1}^N \frac{\phi_{qj}^2}{\lambda_j - \lambda} \quad (۵۳)$$

با در نظر گرفتن رابطه (۴۷) می توان رابطه برگشتی زیر را برای بهنگام نمودن فرکانس های سیستم اصلاح شده از روی معادلات زیر بدست آورد:

$$\lambda_i^{(n+1)} = \frac{\lambda_i + \lambda_i^{(n)} (\lambda_i^{(n)} - \lambda_i) \delta m_q S_{qi}^{(n)}}{1 + \phi_{qi}^2 \delta m_q} \quad (۵۴)$$

که در آن:

$$S_{qi}^{(n)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\phi_{qj}^2}{\lambda_j - \lambda_i^{(n)}} \quad (۵۵)$$

که λ_i فرکانس i ام سیستم اولیه، ϕ_{qi} عضو ماتریس مودی $[\Phi]$ و $\lambda_i^{(n)}$ مقدار فرکانس i ام سیستم اصلاح شده در گام n می باشد.

۱۰- خلاصه و نتیجه گیری

روش های تقریبی آنالیز حساسیت مورد بررسی قرار گرفت. از آنجا که سازه های برشی (سری) بعلت سادگی مدل ریاضی، کاربرد زیادی در مطالعه رفتار دینامیکی سیستم های مکانیکی و ساختمانها دارد، در نتیجه مناسب است با توجه به خصوصیات گفته شده، روش های آنالیز حساسیت را به شکل ساده تری برای استفاده جهت اینگونه سازه ها تبدیل نمود. در این مورد به برخی روشهای موجود شامل روشی برای آنالیز حساسیت مرتبه اول و نیز دو روش برای آنالیز حساسیت مرتبه دوم اشاره گردید. روش اول بر اساس روش نلسون می باشد که در مورد مشتقات مرتبه اول بردارهای ویژه است و در روش دوم از مفهوم معکوس تعمیم یافته استفاده شد. در آنالیز حساسیت فرکانس های یک سازه برشی، اگر مقدار تغییرات سازه ای اندک باشد، روش آنالیز حساسیت مرتبه اول جوابهای مناسبی بدست میدهد. ولی تعیین این محدوده کار ساده ای نیست. برای تغییرات بزرگتر روش آنالیز حساسیت مرتبه دوم جوابهای خوبی میدهد. ولی هیچ کدام از روش های آنالیز حساسیت مرتبه اول و دوم، در تغییرات زیاد جوابهای قابل قبولی تولید نمی نمایند. همچنین برای هر دو روش تعیین محدوده ای از تغییرات سازه ای که منجر به جوابهای مورد قبولی گردد، مشکل بوده و می توان گفت که کاربرد این روشها در مسائل عملی، محدود خواهد بود. در نتیجه ابداع روشهای دقیق تر می تواند گام مهمی در این زمینه باشد. در این مقاله روشی نو برای به هنگام نمودن فرکانس های ارتعاشی سازه های برشی ارائه و عملکرد آن طی چند مثال مورد بررسی قرار گرفت. این روش می تواند در الگوریتم های بهینه سازی سازه های برشی تحت بارهای دینامیکی و نیز در فرایند به هنگام نمودن مدل های المان محدود مورد استفاده قرار گیرد. با توجه به نتایج عددی این روش می توان گفت:

- حتی در تغییرات زیاد در المان های سازه، سرعت همگرایی این روش زیاد است.
- سرعت همگرایی در فرکانس های پایین، بیشتر است.
- روش ارائه شده برای حالت اصلاح سختی، همگرایی سریع تری نسبت به حالت اصلاح جرم دارد.
- در سازه های بزرگ نیز همگرایی این روش خوب بوده و در فرکانس های پایین سرعت همگرایی بسیار زیاد است.

که تعیین محدوده ای از تغییرات در پارامتر های سازه ای که دقت روش های تحلیل حساسیت مرتبه اول و دوم، مورد قبول باشد، کار ساده ای نمی باشد.

در شکل (۳) به ازای تغییرات ۲۰٪، ۵۰٪ و ۱۰۰٪ در جرم m_3 از سیستم سه درجه آزادی میزان تغییرات حاصله در فرکانس مودهای مختلف براساس دو روش مزبور با مقدار دقیق مقایسه شده اند. مجددا مقدار دقیق با در نظر گرفتن سازه اصلاح شده بدست آمده است. دوباره ملاحظه می گردد که هر چه میزان تغییر در المانهای جرم این سیستم افزایش می یابد از مقدار دقت دو روش فوق کاسته می شود.

با استفاده از فرمول های (۴۷-۴۹) می توان میزان تغییرات در پارامتر های سازه ای را بر حسب فرکانس بدست آورد. در این مطالعه هدف تعیین فرکانس های یک سیستم برشی پس از ایجاد تغییراتی در پارامتر های سازه ای آن می باشد. یک روش برای انجام این کار که در مرجع [۱۲] بیان شده است، این است که با استفاده از فرمول های اشاره شده، میزان تغییرات در پارامتر های سازه ای را بر حسب فرکانس ترسیم نموده و سپس با توجه به معلوم بودن مقدار فرکانس، تغییرات موجود در پارامتر های سازه ای تعیین گردند. شکل (۴) نتایج مشابه مربوط به سختی ها را نشان می دهد. به عنوان مثال بمنظور افزایش دادن فرکانس اول از ۲۰/۷۷ به ۲۱/۵ می توان سختی طبقه اول را حدود ۱۵٪ زیاد کرد. این روش برای حل مساله موجود، وقت گیر بوده و بازدهی خوبی ندارد. اصولا هدف از ترسیم منحنی نظیر شکل (۴) همچنانکه هدف اصلی مرجع [۱۲] بوده است، تعیین میزان تغییر مورد نیاز در هر یک از پارامتر های سازه ای می باشد به نحویکه یک یا چند فرکانس به مقادیر مطلوبی انتقال یابند. همچنین در بحث بهینه سازی، المانهای مربوط به خطوطی که دارای شیب کمتری در روی منحنی باشند، در اولویت تغییر دادن می باشند. چون با تغییر کمتر در سازه می توان به اصلاحات بیشتری در فرکانس ها دست یافت. با قراردادن قیودی برای شیب ها می توان با ملاحظه میزان تغییر مجاز در هر المان، آنها را به ترتیبی تغییر داد تا فرکانس های مزبور به مقدار دلخواه انتقال یابند. با استفاده از این روند می توان مدل المان محدود اولیه را بر اساس نتایج آزمایش مودی، اصلاح کرد

همانطور که قبلا اشاره شد، به منظور به هنگام نمودن فرکانس های سازه پس از اعمال تغییراتی در مشخصه های سازه (جرم یا سختی) می توان از شکل های مشابه (۴) استفاده نمود. اما این روش مستلزم صرف زمان قابل ملاحظه ای می باشد. در ادامه نتایج مربوط به روش جدید ارائه شده برای این منظور، آورده شده است. در شکل (۵) تعداد گام های مورد نیاز برای بهنگام نمودن هر یک از فرکانس ها برای حالت ۵۰٪ کاهش در k_2 نشان داده شده است. مقدار فرکانس برای شروع فرایند تکراری، برابر فرکانس سیستم اولیه در نظر گرفته شده است. ملاحظه می شود که در یک و یا دو گام، فرکانس ها تا حد قابل قبولی اصلاح می شوند. شکل (۶) برای حالت ۵۰٪ افزایش در k_2 نتیجه مشابهی را نشان می دهد.

مراجع

تحلیل تجربی و دینامیکی سازه‌ها، دانشگاه گیلان، ۳۱ خرداد ماه ۱۳۷۹.

[۱۶] تابش پور، م. ر.، رحیم زاده، ف.، "روش جدید برای اصلاح مقادیر ویژه ماتریس‌های سه قطری"، دومین کنفرانس بین‌المللی

ریاضیات کاربردی، دانشگاه علم و صنعت ایران، آبان ماه ۱۳۷۹.

[17] Tabeshpour, M. R., and Rofooei, F. R., "A new approach for modification of the frequencies in the shear building systems", *proceedings of 9th Asia-Pacific conference on structural engineering and construction*, 2003, pp. VID134-VID139.

[18] Wang, J., Huang, Z., and Zhang, Q., "Sensitivities of mechanical structures to structural parameters", *J. Computers and Structures*, 1993, Vol. 49, No. 3, pp. 553-560.

[19] Wang, J., Heylen, W., and Sas, P., "Accuracy of structural modification techniques", *proceedings of fifth international conference on modal analysis*, 1987, pp. 65-75.

[20] To, W. M., and Ewins, D. J., "Structural modification analysis using Rayleigh quotient iteration", *Int. J. Mech. Sci.*, 1990 Vol. 32, No. 3, pp. 169-179.

[21] Kim, K., "Improved calculations of modal design sensitivities", *J. Computers and structures*, 1990, Vol. 37, No. 5, pp. 777-780.

[22] Nelson, R. B., "Simplified calculation of eigenvector derivatives", *AIAA J.*, 1976, Vol. 14, No. 9, pp. 1201-1205.

[23] Cao, X., and Mlejnek, H. P., "Second-order eigensensitivity analysis of discrete structural systems", *J. Computers and Structures*, 1992, Vol. 44, No. 1, pp. 399-404.

[24] Rudisill, C. S., and Bhatia, K. G., "Second derivatives of the flutter velocity and the optimization of aircraft structures", *AIAA J.*, 1972, Vol. 10, No. 12, pp. 1569-1572.

[25] Noor, A. K., and Whitworth, S. L., "Model - Size reduction for the buckling and vibration analysis of anisotropic panels", *ASCE J. Eng. Mech.*, 1987, Vol. 113, pp. 170-185.

[26] Wang, B. P., "An improved approximate method for computing eigenvector derivatives", *AIAA, 26th structures, structural dynamics and materials conference.*, Orlando, FL, April 1985.1

[27] Sutter, T. R., et al., "Comparison of several methods for calculating vibration mode shape derivatives", *AIAA J.*, 1987, Vol. 26, No. 12, pp. 1506-1511.

[1] Baruch, M., "Optimal correction of mass and stiffness matrices using measured modes", *AIAA J.*, 1982, Vol. 20, No. 11, pp. 1623-1626.

[2] Wei, F., "Mass and stiffness interaction effects in analytical model modification", *AIAA J.*, 1989, Vol. 28, No. 9, pp. 1686-1688.

[3] Berman, A., "Mass matrix correction using an incomplete set of measured modes", *AIAA J.*, 1979, Vol. 17, pp. 1147-1148.

[4] Minaz, C., and Inman, D. J., "Matching finite element models to modal data", *J. Vib. Acou.*, 1990, Vol. 112, pp. 84-92.

[5] Chen, J. C., and Wada, B. K., "Criteria for analysis- test correlation of structural dynamic systems", *J. App. Mech.*, June 1975, pp. 471-477.

[6] Chen J. C., and Wada, B. K., "Criteria for analysis-teat correlation of structural dynamic analysis", *AIAA J.*, 1977, Vol. 15, No. 8, pp. 1095-1100.

[7] Smith, M. J., and Hutton, S. G., "A perturbation method for inverse frequency modification of discrete, undamped systems", *J. App. Mech.*, 1994, Vol. 61, pp. 887-892.

[8] Chen, J. C., and Garba, J. A., "Analytical model improvement using modal test results", *AIAA J.*, 1979, Vol. 18, No. 6, pp. 684-690.

[9] Berman, A., "Multiple acceptable solutions in structural model improvement", *AIAA J.*, 1995, Vol. 33, No.5, pp. 924-927.

[10] Lin, R. M., and Lim. M. K., "Relationship between improved inverse eigensensitivity and FRF sensitivity methods for analytical model updating", *J. Vib. Acou.*, 1997, Vol. 119, pp. 354-362.

[11] Eldred, M.S., and Anderson, W. J., "Higher order eigenpair perturbations", 1992, Vol. 30, No. 7, pp. 1870-1876.

[12] Tsuei, Y. G., and Yee, E. K. L., "A method for modifying dynamic properties of undamped mechanical systems", *J. dyn. sys. meas. ctrl.*, 1989, Vol. 111, pp. 403-408.

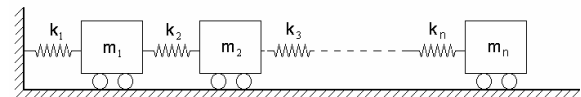
[13] Yee, E. K. L., and Tsuei Y. G., "Method for shifting natural frequencies of damped mechanical systems", *AIAA J.*, 1991, Vol. 29, No. 11, pp. 1973-1977.

[۱۴] تابش پور، م. ر.، رحیم زاده، ف.، "روش برای اصلاح فرکانس‌های ارتعاشی سازه‌های برشی"، پنجمین کنفرانس بین‌المللی مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد، ۲۱-۱۹ اردیبهشت ماه ۱۳۷۹.

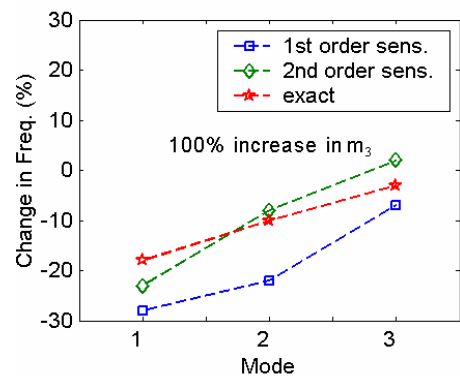
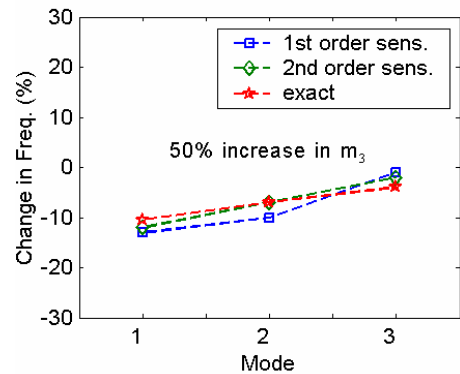
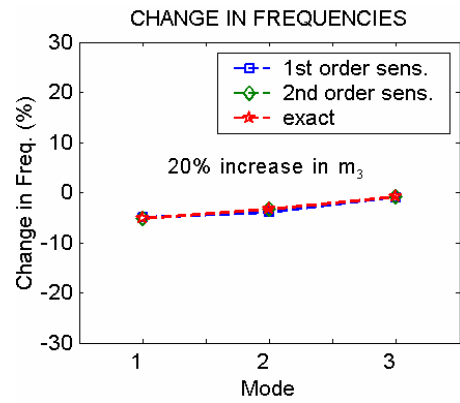
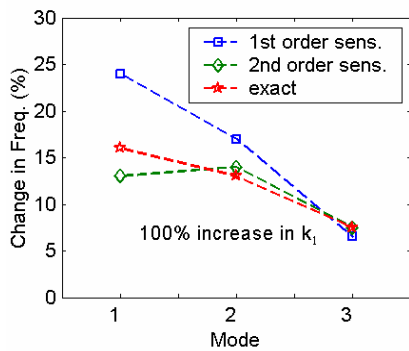
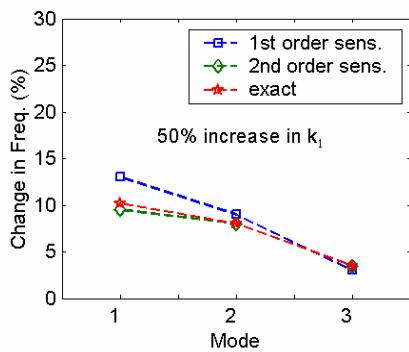
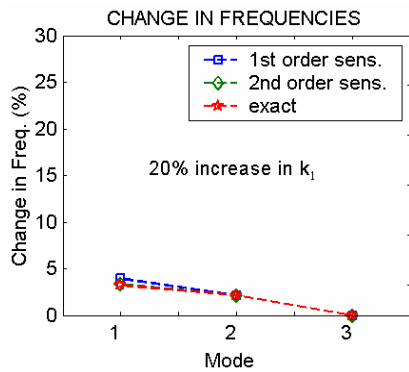
[۱۵] تابش پور، م. ر.، رحیم زاده، ف.، "بررسی اثر تغییرات سازه‌ای بر خواص ارتعاشی سازه‌های بلند"، هفتمین کنفرانس سالانه

جدول ۲: خواص ارتعاشی سازه سه درجه آزادی

مُد ارتعاشی	فرکانس اولیه سیستم	فرکانس اصلاح شده			
		حالت اول	حالت دوم	حالت سوم	حالت چهارم
۱	۲۰/۷۸	۱۷/۷۴	۲۲/۱۰	۲۳/۷۰	۱۸/۵۹
۲	۵۶/۲۹	۵۳/۱۲	۵۷/۴۱	۶۳/۸۹	۵۲/۳۹
۳	۷۹/۰۵	۶۹/۳۸	۸۹/۲۵	۸۶/۳۵	۷۷/۵۲



شکل ۱- مدل ریاضی سیستم برشی

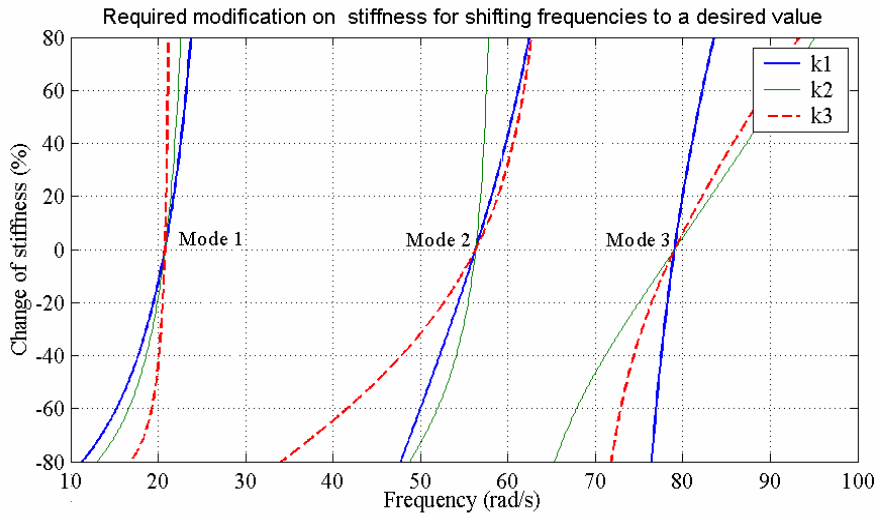


شکل ۲- اثر میزان تغییر در جرم بر فرکانسها

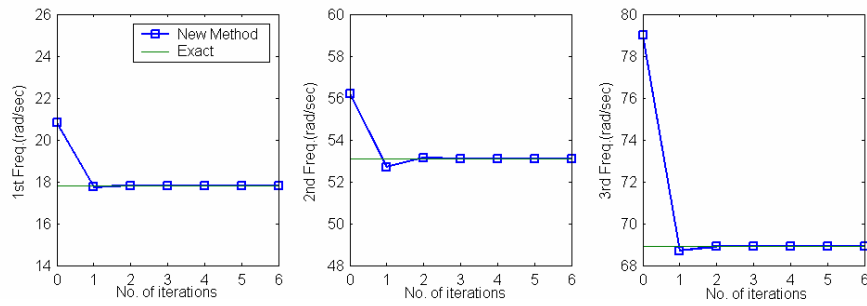
شکل ۳- اثر میزان تغییر در سختی بر فرکانسها

جدول ۱: مشخصات سازه سه درجه آزادی

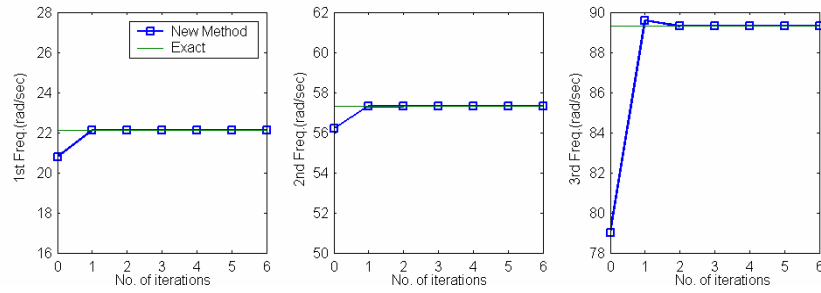
پارامتر سازه	شماره المان		
	۱	۲	۳
جرم	۱۰	۱۰	۸
سختی	۲۰۰۰۰	۱۹۰۰۰	۱۸۰۰۰



شکل ۴- تغییرات سختی بر حسب فرکانس



شکل ۵- تعداد گام‌های مورد نیاز برای اصلاح فرکانس (۵۰٪ کاهش در k_2)



شکل ۶- تعداد گام‌های مورد نیاز برای اصلاح فرکانس (۵۰٪ افزایش در k_2)