

## بررسی مفهومی و تحلیلی ناپایداری ماتیو در سکوی اسپار

وحید علیپور سرابی<sup>۱</sup>، محمدرضا تابش پور<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup>دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، vahidalipour1@gmail.com  
<sup>۲</sup>استادیار، قطب علمی هیدرودینامیک و دینامیک متحرک‌های دریایی، دانشگاه صنعتی شریف، tabeshpour@sharif.edu

### چکیده

در رفتار ارتعاشی، وجود نیروی تحریک با پریودی برابر با پریود طبیعی سازه موجب تشدید در حرکت سازه می‌شود. در سکوی اسپار به دلیل رفتار غیرخطی و نیز همگیری بین درجات آزادی هیو و پیچ رخ می‌دهد. اگر پریود پیچ دو برابر هیو باشد پدیده تشدید رخ می‌دهد. دلیل این امر و چگونگی آن در این مقاله بحث شده است. در ناپایداری ماتیو بدلیل رفتار غیرخطی سیستم که ناشی از غیرخطی بودن معادله حرکت است بدلیل وجود ترم اختلالی بررسی فرآیند و تأثیری که ترم اختلال بر پاسخ‌ها دارد موضوعی قابل توجه است. چگونگی رخ دادن این پدیده و تأثیری میرایی بر آن در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است. فرمول‌بندی نسبتاً کاملی ارائه شده و بحث مفهومی در این خصوص انجام شده است.  
**کلمات کلیدی:** اختلال، معادله ماتیو، ناپایداری ماتیو، نمودار پایداری، سکوی اسپار.

## Analytical and Conceptual investigation of Mathieu Instability in SPAR

Vahid Alipour Sarabi<sup>1</sup>, Mohammad Reza Tabeshpour<sup>\*2</sup>

<sup>1</sup>MSc, Sharif University of Technology; malayjerdi\_brahim@mech.sharif.edu

<sup>3</sup>Assistant Professor, Sharif University of Technology, Center of Excellence in Hydrodynamics and Dynamics of Marine Vehicles; tabeshpour@sharif.edu

### Abstract

In vibrational characteristic of a structure, a force with a period of the exact natural period of that structure causes resonance phenomenon. In SPAR platform when pitch natural period is twice than that of heave, a kind of resonance happens called Mathieu instability. This happens because of non-linear behavior of system and coupling between heave and pitch. Because of perturbation term, investigation and the effects of that perturbation term on responses is a considerable subject. In this paper Mathieu instability is investigated and discussed conceptually.

**Keywords:** SPAR, Mathieu instability.

### مقدمه

معادله‌ی ماتیو یک رابطه‌ی دیفرانسیلی خطی مرتبه‌ی دوم می‌باشد که ضریبی متغیر (پریودیک) دارد. این معادله اولین بار توسط امیلی لئونارد ماتیو<sup>۱</sup> در سال ۱۸۶۸ در رابطه با مساله‌ی ارتعاشات عضوهای بیضوی (Elliptical Memberance) مورد بحث قرار گرفت [۲]. معادلات ماتیو بر مساله‌های فیزیکی بسیاری وارد است، از جمله، پایداری ریل‌هایی که قطار بر روی آنها حرکت می‌کند، نیروهای دینامیکی فصلی که توسط جمعیت بر سازه وارد می‌گردند، انتشار نور به صورت نوسانی و در پدیده‌هایی که رزونانس در آنها به صورت پارامتریک در نیروهای نوسانی رخ می‌دهد. این معادله در مسائل ارتعاشات غیر خطی [۳] به دو روش ظهور پیدا می‌کند: (۱) در سیستم‌هایی که در آنها یک نیروی پریودیک وجود دارد، (۲) در مطالعات پایداری حرکات پریودیک، در سیستم‌هایی غیرخطی که به صورت خودکار و یا غیر ارادی<sup>۲</sup> حرکات پریودیک بوجود می‌آید. نگرانی عمده‌ای که در باب معادله ماتیو وجود دارد این است که آیا تمامی پاسخ‌های سیستم برای مقادیر پارامترهای و آیا دارای کران هست یا خیر. اگر تمامی پاسخ‌ها کران دار باشند بنابراین نقطه

متناظر در صفحه پارامتر را به عنوان یک نقطه پایدار بیان می‌کنند، و اگر کرانی وجود نداشت برای حل، پس حل ناپایدار خواهد بود که به موجب آن سیستم ناپایدار خواهد شد.

### نمودار ماتیو

برای رعایت ترتیب منطقی، معادله حرکت سکوی اسپار در انتهای مقاله آورده شده است. فرم کانونیک معادله دیفرانسیلی ماتیو به صورت زیر است:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\delta + \varepsilon \cos(t))x = 0 \quad (1)$$

که در آن  $\delta$  و  $\varepsilon$  ترم‌های ثابت هستند.

معادله ماتیو حالت خاصی از معادله هیل<sup>۳</sup> است. معادله هیل معادله‌ای خطی است که یک ضریب پریودیک در آن وجود دارد.

$$f(x+T) = f(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)y = 0 \quad (2)$$

شکل استاندارد معادله هیل به صورت زیر است:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (a + p(x))y = 0 \quad (3)$$

در معادله هیل،  $p(x)$  یک عبارت پریودیک است. برای حالت خاص می‌توان داشت:

$$p(x) = b \cos(x) \quad (4)$$

معادله دیفرانسیلی (۱) معادله ماتیو بدون وجود میرایی را نشان می‌دهد. فرم معادله ماتیو دارای ترم میرایی به صورت زیر است:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + c \frac{dy}{dx} + (a + b \cos(x))y = 0 \quad (5)$$

این معادله غیر خطی است و نمی‌توان آن را به صورت دقیق حل کرد. دو روش برای حل و یافتن پاسخ این معادله وجود دارد. روش اول استفاده از روش اختلال<sup>۴</sup> است و روش دوم استفاده از درمینان نامحدود ماتریس هیل می‌باشد.

### روش اختلال

#### (نمودارهای گذار<sup>۵</sup>)

در اینجا هدف حل معادله خطی درجه دوم (۱) بدون در نظر گرفتن میرایی است. با استفاده از روش بسط دو متغیره در پی یک حل عمومی برای معادله ماتیو بازای مقادیر کوچک  $\varepsilon$  هستیم. از آنجایی که معادله ماتیو (شماره معادله) معادله‌ای خطی می‌باشد بنابراین نیازی به بسط زمان برای در نظر گرفتن ترم اختلال و تاثیر آن در سیستم، نخواهد بود. با قرار دادن  $\zeta = t$  و  $\eta = \varepsilon t$  داریم که:

$$\frac{d^2x}{d\zeta^2} + 2\varepsilon \frac{d^2x}{d\zeta d\eta} + \varepsilon^2 \frac{d^2x}{d\eta^2} + (\delta + \varepsilon \cos(\zeta))x = 0 \quad (6)$$

هدف ما از حل مساله این است که وجود ترم اختلال علاوه بر تغییراتی که در فرکانس سیستم و تغییر آن به سمت فرکانسی دیگر دارد، چه تغییراتی برای پاسخ واقعی سیستم بدلیل ترم متغیر با زمان سختی افزود بوجود می‌آورد. بنابراین با در نظر گرفتن و بسط پاسخ به صورت سری‌های توانی بر حسب ترم اختلال داریم که:

$$x(\zeta, \eta) = x_0(\zeta, \eta) + \varepsilon x_1(\zeta, \eta) + \varepsilon^2 x_2(\zeta, \eta) + \dots \quad (7)$$

با قرار دادن عبارت (۷) در عبارت (۶) و در نظر نگرفتن ترم‌های  $O(\varepsilon^2)$  به بعد داریم که:

$$\frac{d^2 x_0}{d\zeta^2} + \delta x_0 = 0$$

$$\frac{d^2 x_1}{d\zeta^2} + \delta x_1 = -2 \frac{d^2 x_0}{d\zeta d\eta} - x_0 \cos \zeta \quad (8)$$

دو عبارت (۸) برای زمانی است که فرکانس را بدلیل وجود ترم اختلال بسط نداده‌ایم، بعبارتی شکل عمومی و کلی  $\delta$  را نوشته‌ایم. فعلا بدون در نظر گرفتن مقدار بسط داده شده  $\delta$  و در نظر گرفتن شکل عمومی آن، با توجه به دو معادله (۸) می‌توان پاسخ‌های سیستم را بدست آورد:

$$x_0(\zeta, \eta) = A(\eta) \cos \sqrt{\delta} \zeta + B(\eta) \sin \sqrt{\delta} \zeta \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{d\zeta^2} + \delta x_1 &= 2\sqrt{\delta} \frac{dA}{d\eta} \sin \sqrt{\delta} \zeta - 2\sqrt{\delta} \frac{dB}{d\eta} \cos \sqrt{\delta} \zeta \\ &- \frac{A}{2} \left( \cos(\sqrt{\delta} + 1)\zeta + \cos(\sqrt{\delta} - 1)\zeta \right) \\ &- \frac{B}{2} \left( \sin(\sqrt{\delta} + 1)\zeta - \sin(\sqrt{\delta} - 1)\zeta \right) \end{aligned} \quad (10)$$

وجود ترم اختلال بدلیل کوچک بودن نباید سبب شود که پاسخ سیستم دارای کران نباشد و همچون توابع نمایی تغییر کند، بنابراین با توجه به پاسخ عمومی معادله (۱۰) که به صورت زیر است:

$$x_1(\zeta, \eta) = A'(\eta) \sin(\sqrt{\delta} \zeta) + B'(\eta) \cos(\sqrt{\delta} \zeta) \quad (11)$$

باید تمامی نیروهایی که در معادله (۱۰) در سمت راست مشابه با پاسخ عمومی است حذف شود. این کار موجب می‌شود که داشته باشیم:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\eta} &= 0 \\ \frac{dB}{d\eta} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

ولی دو معادله (۱۲) جواب بدیهی خواهند بود که مناسب بررسی نیستند. با در نظر گرفتن  $\delta = \frac{1}{4}$  برای کاوش بیشتر در اینکه دامنه‌ها در معادله به چه صورت و بازای چه مقادیری تغییرات دارند، داریم که:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{d\zeta^2} + \frac{1}{4} x_1 &= \frac{dA}{d\eta} \sin \frac{\zeta}{2} - \frac{dB}{d\eta} \cos \frac{\zeta}{2} \\ &- \frac{A}{2} \left( \cos\left(\frac{3}{2}\right)\zeta + \cos\left(\frac{1}{2}\right)\zeta \right) \\ &- \frac{B}{2} \left( \sin\left(\frac{3}{2}\right)\zeta - \sin\left(\frac{3}{2}\right)\zeta \right) \end{aligned} \quad (13)$$

حال با حذف ترم‌های مسبب رزونانس (۱۳) داریم که:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\eta} &= -\frac{B}{2} \\ \frac{dB}{d\eta} &= -\frac{A}{2} \end{aligned} \quad (14)$$

در نتیجه:

$$\frac{d^2 A}{d\eta^2} = \frac{A}{4}$$

$$\frac{d^2 B}{d\eta^2} = \frac{B}{4} \quad (15)$$

حل دو معادله مرتبه دوم خطی (۱۴) و (۱۵) به ما پاسخی نمایی می‌دهد که سبب بی‌کران شدن پاسخ سیستم می‌شود. عبارت فرکانس را ( $\delta$ ) بر حسب ترم اختلال بسط می‌دهیم. مقدار  $1/4$  برابر با مقدار  $\delta_0$  خواهد بود.

$$\delta = \frac{1}{4} + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \dots \quad (16)$$

با بسط فرکانس و در نظر گرفتن عبارت (۱۶) و جایگزینی در معادله (۴-۲۵) معادله (۸) به صورت زیر خواهند شد:

$$\frac{d^2 x_0}{d\zeta^2} + \delta x_0 = 0$$

$$\frac{d^2 x_1}{d\zeta^2} + \delta x_1 = -2 \frac{d^2 x_0}{d\zeta d\eta} - x_0 \cos \zeta - \delta_1 x_0 \quad (17)$$

با حل دو معادله (۱۷) همچون گذشته به دو معادله زیر می‌رسیم:

$$\frac{dA}{d\eta} = (\delta_1 - \frac{1}{2})B$$

$$\frac{dB}{d\eta} = -(\delta_1 + \frac{1}{2})A \quad (18)$$

در نتیجه:

$$\frac{d^2 A}{d\eta^2} + (\delta_1^2 - \frac{1}{4})A = 0$$

$$\frac{d^2 B}{d\eta^2} + (\delta_1^2 - \frac{1}{4})B = 0 \quad (19)$$

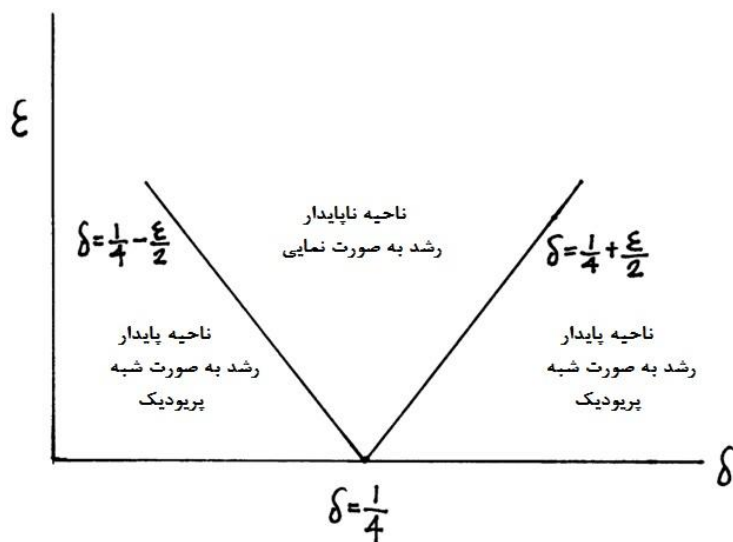
دو معادله خطی مرتبه دوم (۱۹) بسته به مقدار  $\delta_1$  می‌توانند پاسخی نمایی و یا به صورت توابع کسینوسی داشته باشند. در معادلات (۹) و (۱۱) داشتیم که پایداری یا ناپایداری سیستم به توجه به مقادیر  $A(\eta)$  و  $B(\eta)$  که دامنه‌ها محسوب می‌شوند حساس است. برای

پایداری سیستم باید  $(\delta_1^2 - \frac{1}{4}) > 0$  که پاسخ به صورت توابع کسینوسی شود، در غیر این صورت یعنی در حالتی که  $(\delta_1^2 - \frac{1}{4}) < 0$  باشد دامنه‌ها به صورت نمایی خواهند شد که نقاط ناپایدار سیستم را نشان می‌دهند. پس برای نقاط پایدار سیستم باید  $\delta_1 > \frac{1}{2}$  و

$\delta_1 < -\frac{1}{2}$  باشد. پس نقطه جدا کننده  $1/2$  خواهد بود. بنابراین داریم که:

$$\delta = \frac{1}{4} \pm \varepsilon \frac{1}{2} + \varepsilon^2 \delta_2 + \dots \quad (20)$$

اگر بخواهیم که تنها دو عبارت اول عبارت (۲۰) را در نظر بگیریم با رسم عبارت بالا در صفحه  $\varepsilon - \delta$  به منحنی و یا نموداری مشهور به نمودار گذار می‌رسیم. نمودار گذار با توجه به نواحی پایدار و ناپایدار به صورت زیر خواهد شد:



شکل ۱: تعیین نقاط پایدار پس از حل معادله ماتئو [۴]

با توجه به تئوری بنام تئوری فلوکوئت اثبات می شود که نقاط جدا کننده منحنی ها از سطح افقی ( $\delta$ ) به صورت زیر خواهد بود:

$$\delta = \frac{n^2}{4} \quad (21)$$

که  $n=0,1,2,\dots$

سیس اثبات می شود که:

$$\delta = \frac{n^2}{4} + \varepsilon\delta_1 + \varepsilon^2\delta_2 + \dots \quad (22)$$

با در نظر گرفتن مقدار (۲۲) و جایگزینی هایی که در معادله ماتئو برای دو ترم اول داشتیم و با در نظر گرفتن جایگزینی هایی بیشتر می توان به عبارات زیر رسید:

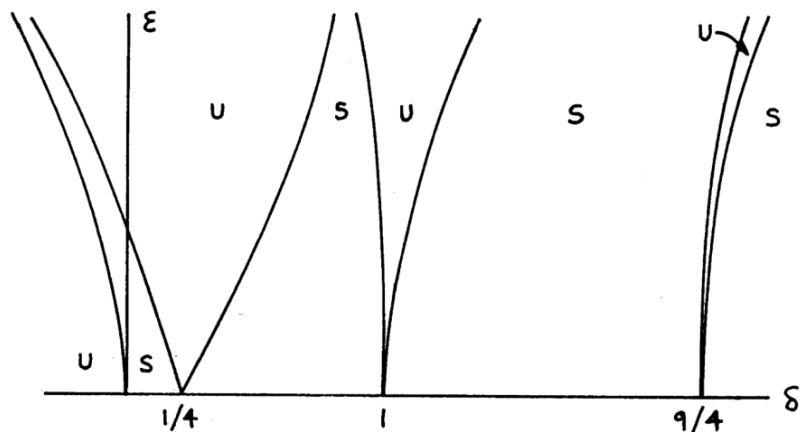
$$\delta = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \frac{1}{32}\varepsilon^3 - \frac{1}{384}\varepsilon^4 - \frac{11}{4608}\varepsilon^5 + \frac{49}{36864}\varepsilon^6 - \frac{55}{294912}\varepsilon^7 - \frac{83}{552960}\varepsilon^8 + \frac{12121}{117964800}\varepsilon^9 - \frac{114299}{6370099200}\varepsilon^{10} - \frac{192151}{15288238080}\varepsilon^{11} + \dots \quad (23)$$

$$\delta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 - \frac{1}{32}\varepsilon^3 - \frac{1}{384}\varepsilon^4 + \frac{11}{4608}\varepsilon^5 + \frac{49}{36864}\varepsilon^6 + \frac{55}{294912}\varepsilon^7 - \frac{83}{552960}\varepsilon^8 - \frac{12121}{117964800}\varepsilon^9 - \frac{114299}{6370099200}\varepsilon^{10} + \frac{192151}{15288238080}\varepsilon^{11} + \dots \quad (24)$$

$$\delta = 1 - \frac{1}{12}\varepsilon^2 + \frac{5}{3456}\varepsilon^4 - \frac{289}{4976640}\varepsilon^6 + \frac{21391}{7166361600}\varepsilon^8 - \frac{2499767}{14447384985600}\varepsilon^{10} + \frac{1046070973}{97086427103232000}\varepsilon^{12} + \dots \quad (25)$$

$$\delta = 1 + \frac{5}{12}\varepsilon^2 - \frac{763}{3456}\varepsilon^4 + \frac{1002401}{4976640}\varepsilon^6 - \frac{1669068401}{7166361600}\varepsilon^8 + \frac{4363384401463}{14447384985600}\varepsilon^{10} - \frac{40755179450909507}{97086427103232000}\varepsilon^{12} + \dots \quad (26)$$

با توجه به عبارات (۲۳)-(۲۶) منحنی گذار به صورت شکل خواهد بود:

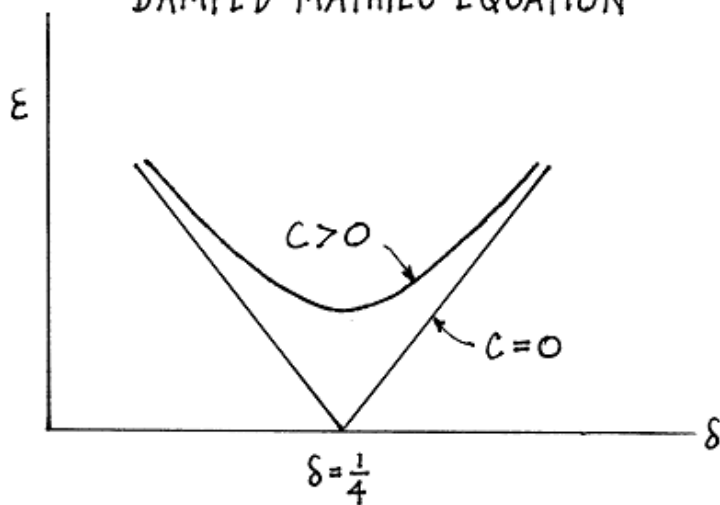


شکل ۲: منحنی گذار. U نواحی ناپایدار، S نواحی پایدار [۴]

### تأثیر میرایی

آنچه تا اکنون مورد بررسی بوده، معادله ماتریو در حالتی بود که ترم میرایی در نظر گرفته نشد. با توجه به روندی که برای حل معادله ماتریو بدون میرایی طی شد، با ادامه این روند برای معادله ماتریو دارای میرایی به منحنی می‌رسیم که وجود میرایی موجب برخاستن منحنی از سطح افقی منحنی  $\epsilon - \delta$  می‌شود که سبب افزایش مساحت ناحیه پایدار خواهد شد.

### DAMPED MATHIEU EQUATION



شکل ۳: منحنی گذار. تأثیر میرایی بر نواحی ناپایدار و نواحی پایدار [۴]

### روش هیل

این روش به این صورت است که با بهره بردن از تئوری بنام Floquet فرض‌هایی را برای حل معادله ماتریو وارد می‌کند. در این تئوری هر تابعی که شکلی به صورت معادله (۲۷) داشته باشد:

$$x' = A(t)x \quad (27)$$

آنگاه تابع  $x$  به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$x = \exp(\gamma t) A(t) \quad (28)$$

که در آن  $A(t)$  یک تابع پریودیک با دوره تناوب  $\pi$  است.  $A(t)$  تابعی متناوب است پس با استفاده از سری فوریه می‌توان آن را به صورت زیر بسط داد:

$$A(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \exp(i \frac{2n\pi}{L} t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \exp(i \frac{2n\pi}{\pi} t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \exp(i2nt) \quad (29)$$

حال با توجه به مقدار  $x$  که از تئوری Floquet فرض شد با برابری آن با  $y$  داریم:

$$y = \exp(\gamma t) A(t) = \exp(\gamma t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \exp(i2nt) \quad (30)$$

با جایگزینی عبارت (30) در معادله‌ی ماتریو به معادله زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + ay &= \exp(\gamma t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\gamma^2 + i4n\gamma + a) A_n \exp(i2nt) = \exp(\gamma t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [(\gamma + i2n)^2 + a] A_n \exp(i2nt) = \\ [2 \cos(2t)]y &= [\exp(i2t) + \exp(-i2t)] \exp(\gamma t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \exp(i2nt) = \exp(\gamma t) \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \exp(i2(n+1)t) \right. \\ &+ \left. \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \exp(i2(n-1)t) \right\} = \exp(\gamma t) \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (A_{n-1} + A_{n+1}) \exp(i2nt) \right] \end{aligned} \quad (31)$$

و با جایگزینی عبارات (31) در معادله‌ی ماتریو داریم:

$$\ddot{y} + (a + 2q \cos 2t)y = \exp(\gamma t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{ (qA_{n-1} + [(\gamma + i2n)^2 + a]A_n + qA_{n+1}) \exp(i2nt) \} = 0 \quad (32)$$

ضرایب هر کدام از  $\exp(i2nt)$  باید مساوی با صفر باشد، که برای داشتن جواب غیر بدیهی منجر به یک سری از معادلات نامحدود بازی  $A_n$  خواهد شد، پس دترمینان ماتریس ضرایب، که وابسته به مقدار  $\gamma$  هستند باید مساوی با صفر باشد که به صورت زیر مشاهده می‌شود:

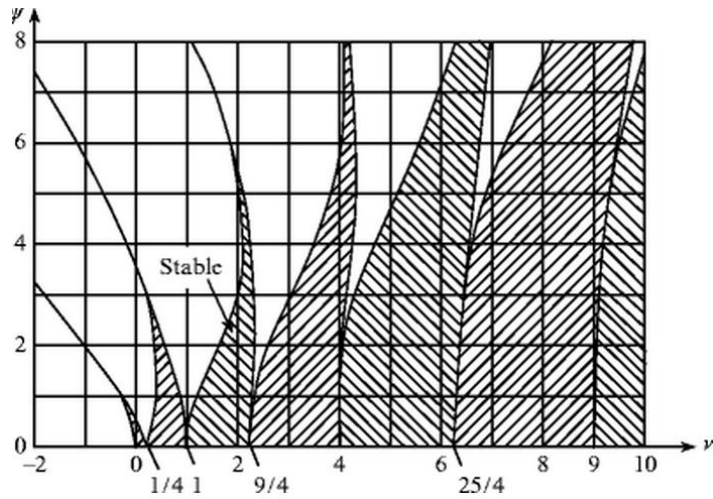
$$\Delta(\gamma) = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \varepsilon & (\gamma - 4i)^2 + \delta & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \varepsilon & (\gamma - 2i)^2 + \delta & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & \gamma^2 + \delta & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & (\gamma + 2i)^2 + \delta & \varepsilon & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & (\gamma + 4i)^2 + \delta & \varepsilon & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = 0 \quad (33)$$

Watson و Whittaker نشان دادند که:

$$\Delta(\gamma) = \Delta(0) - \frac{\sin^2(\frac{i\pi}{2} \gamma)}{\sin^2(\frac{\pi}{2} \sqrt{a})} \quad (34)$$

بنابراین:

$$\Delta(\gamma) = \Delta(0) - \frac{\sin^2(\frac{i\pi}{2} \gamma)}{\sin^2(\frac{\pi}{2} \sqrt{a})} = 0 \rightarrow \sin(\frac{i\pi}{2} \gamma) = \pm [\Delta(0) \sin^2(\frac{\pi}{2} \sqrt{a})]^{\frac{1}{2}} \rightarrow \gamma = \pm \frac{2i}{\pi} \sin^{-1} \{ [\Delta(0) \sin^2(\frac{\pi}{2} \sqrt{a})]^{\frac{1}{2}} \} \quad (35)$$



شکل ۴: نمودار پایداری برای معادله ماتیو. نواحی هاشور خورده نواحی پایدار سازه محسوب می‌شوند [۵]

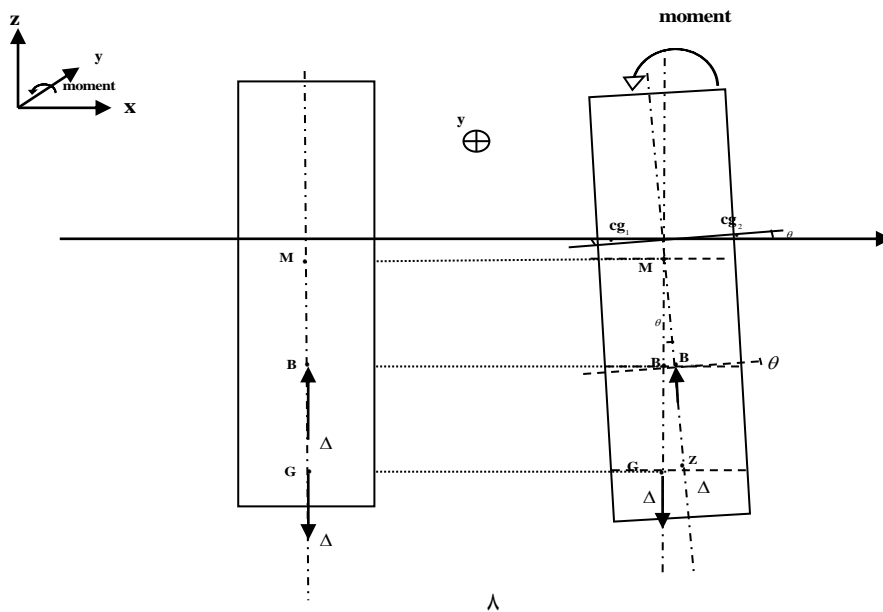
ماتیو در حوزه دریا (محاسبه سختی پیچ اسپار کلاسیک)

اگر سازه را به اندازه ممان  $m$  حول محور  $y$  بچرخانیم بگونه‌ای که تداعی کننده حرکت پیچ باشد آنگاه با توجه به شکل ۱ مقدار ممانی که در برابر ممان وارد شده مقاومت می‌کند و به عبارتی حکم ممان بازگرداننده را دارد به صورت زیر محاسبه می‌شود. همانگونه که می‌دانیم وزن آب جابجا شده توسط سازه درون آب برابر است با وزن حجم مغروق سازه:

$$\Delta = \rho g \nabla \quad (36)$$

همانگونه که از شکل ۵ مشخص است بازای زوایای کوچک ممان در حالت دوم برابر است با:

$$\begin{aligned} \text{moment} &= \overline{\Delta \cdot GZ} \\ \overline{GZ} &= \overline{GM} \cdot \sin \theta \\ \overline{GZ} &= \overline{GM} \cdot \theta \end{aligned} \quad (37)$$





با توجه به معادلات بالا:

$$moment = (\Delta \times \overline{GM}) \times \theta \quad (38)$$

از طرفی داریم که:

$$\Delta = \rho \times g \times \nabla$$

$$moment = (\rho g \nabla \times \overline{GM}) \times \theta \quad (39)$$

پس مقدار سختی پیچ به صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{moment}{\theta} = k_{pitch} = (\rho g \nabla \times \overline{GM}) \quad (40)$$

معادلات حرکات هیو و پیچ سازه به ترتیب به صورت زیر برقرار هستند:

$$(M_{33} + A_{33})\ddot{\eta}_3 + B_{33}\dot{\eta}_3 + \rho g A_w \eta_3 = F_{w3}$$

$$(I_{55} + A_{55})\ddot{\eta}_5 + B_{55}\dot{\eta}_5 + \rho g \nabla \overline{GM} \eta_5 = F_{w5} \quad (41)$$

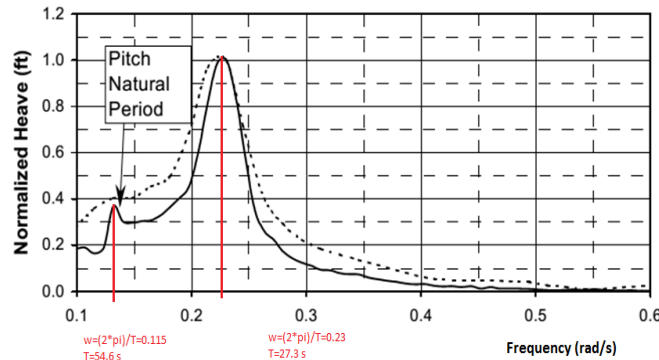
پس از قرار دادن مقدار سختی پیچ در معادله پیچ داریم:

$$\ddot{\eta}_5 + \frac{B_{55}}{(I_{55} + A_{55})} \dot{\eta}_5 + \rho g \nabla \overline{GM}_0 \left(1 - \frac{\eta_3}{2GM_0}\right) \eta_5 = F_{w5} \quad (42)$$

معادله بالا برای حرکت پیچ است که به فرم معادله ماتیو بدست آمده است.

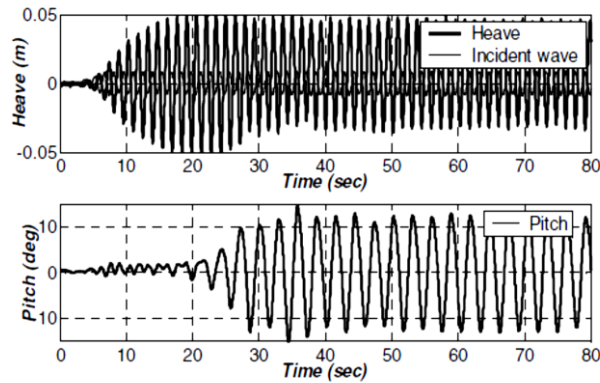
### اثر رخ داد ماتیو بر سازه

در شکل زیر می‌توان کوپلینگ بین پیچ و هیو را دید. برای سازه ای چون اسپار کلاسیک که مقدار پریود پیچ دو برابر هیو است این ناپایداری نمود پیدا می‌کند.



شکل ۶: نمودار تاثیر کوپل شدن حرکات هیو و پیچ در RAO هیو [۶]

همانگونه که می‌دانیم وجود هیو در معادله‌ی پیچ نشان دهنده‌ی کوپلینگ بین دو نوع حرکت است. در واقع با افزایش حرکت پیچ بدلیل این کوپلینگ پس از مدتی حرکت هیو نیز افزایش می‌یابد. در شکل زیر می‌توان این کوپلینگ را با افزایش میزان حرکت پیچ در تاریخچه زمانی حرکت هیو دید.



شکل ۷: نمودار تاریخچه زمانی حرکت پیچ بر اثر کوپلینگ با حرکت هیو [۷]

## نتایج

بدلیل کوپلینگ بین هیو و پیچ سکوی اسپار در رفتاری غیر خطی، ضریب بازوی بازگرداننده پیچ تابعی خواهد شد از حرکت هیو، که این موضوع را می‌توان توسط معادله ماتریو بیان کرد. زمانی که برای اسپار ناپایداری ماتریو رخ می‌دهد پدیده‌ی قفل شدگی در حرکت پیچ رخ می‌دهد. بسته به مقدار میرایی، ناپایداری ماتریو نیز تغییراتی دارد. در شکل ۳ می‌توان این موضوع را دید.

## منابع

- [1] Verhulst, Ferdinand, "Perturbation Analysis of Parametric Resonance", February 2008.
- [2] Leonard Mathieu, E, "Study of Mathieu Equation near Stability Boundary", Indian Institute of Science, 2011.
- [3] Nayfeh, Ali Hasan, "Nonlinear Oscillation", 1933.
- [4] Richard, H. Rand., "Lecture Notes on Nonlinear Vibrations", Dept. Theoretical & Applied Mechanics, Cornell University, Ithaca NY 14853, rhr2@cornell.edu 2005.
- [5] Trirogoff, K. N., and Gallegos, K. D., "the dynamic stability of elastic systems", November 1962, Prepared for Commander Space Systems Division United States Air Force of Science, 2011.
- [6] Zou, J., "Spar Hull/Mooring/Riser Coupled Dynamic Analysis, VIM Effects, and Mathieu Instability", 2013.
- [7] Rho, J.B, and Choi, H. S., "an Experimental Study for Mooring Effects on the Stability of Spar Platform", May 25-30, 2003, Proceedings of the 13<sup>th</sup> International Offshore and Polar Engineering Conference.