

آزمون دوم میان ترم مقاومت مصالح (تابش پور)

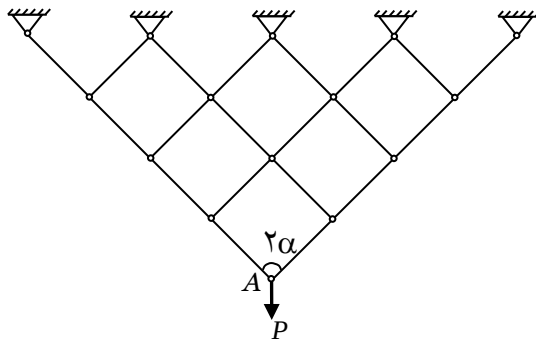
نام و نام خانوادگی:

وقت: ۷۵ دقیقه

اردیبهشت ۹۶

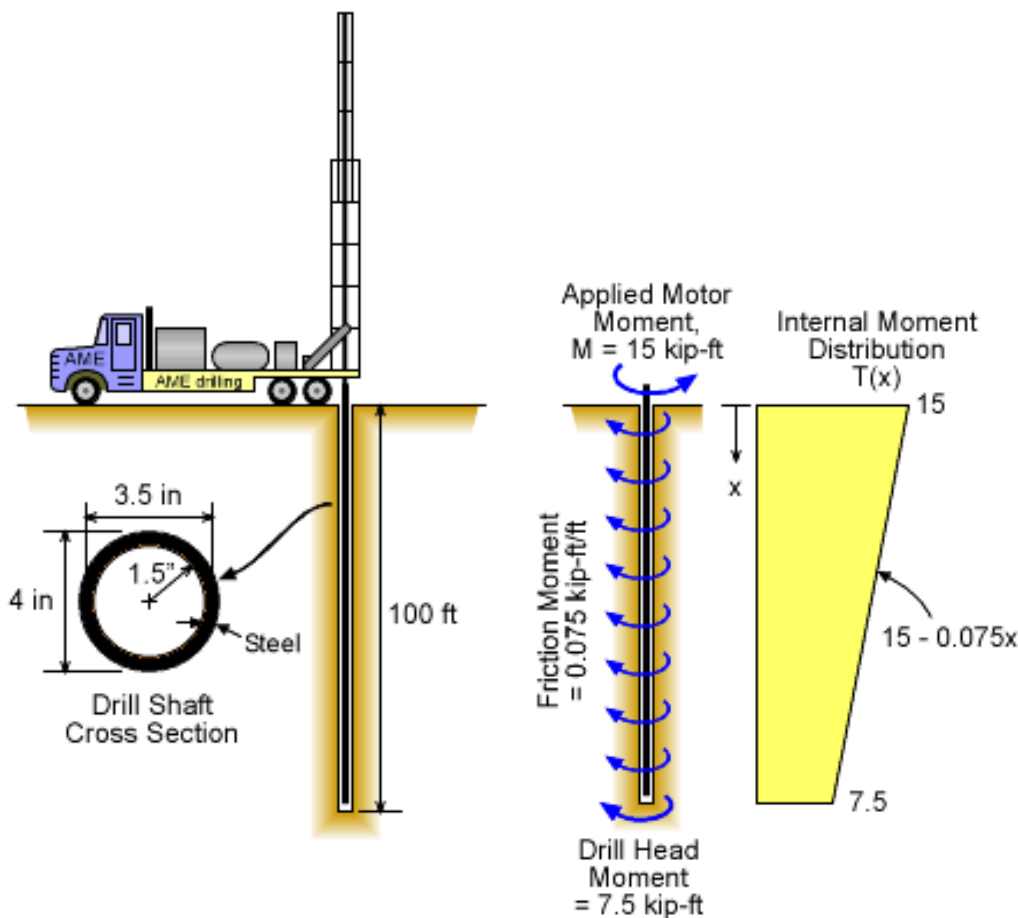
مسئله اول (۵ نمره ۵ دقیقه):

جابه‌جایی نقطه A تحت بارگذاری داده شده در سازه زیر را محاسبه کنید. اعضا مشابه و دارای خواص یکسانی هستند.



مسئله دوم (۶ نمره ۱۵ دقیقه):

در هنگام حفاری، مقاومت چرخشی در سر و در امتداد مته وجود دارد. مقاومت سر مته حفاری در اثر حفاری سنگ و خاک ایجاد می‌شود. بخشی از مقاومت چرخشی مته ناشی از اصطکاک لوله‌ی حفاری با دیواره چاه است. اگر فرض شود که نصف گشتاور موتور ماشین حفاری در سر مته استفاده می‌شود و نصف دیگر این گشتاور صرف غلبه بر مقاومت مته در اثر اصطکاک می‌شود، زاویه‌ی پیچش کل مته حفاری را تعیین کنید؟



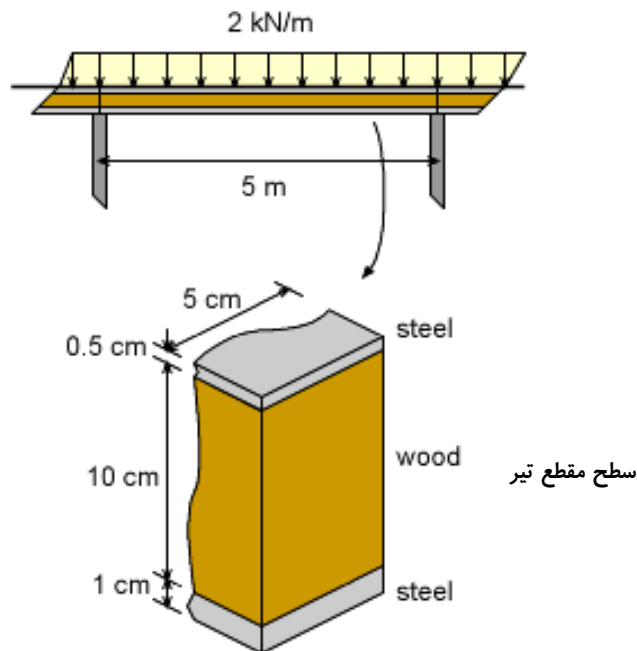
فرض کنید که مقاومت میله در امتداد طول ۱۰۰ فوت، ثابت است. لوله‌ی حفاری از جنس فولاد و مدول یانگ آن برابر $29,000ksi$ و نسبت پواسون ۰.۲۹ است. قطر بیرونی لوله ۴ اینچ و قطر داخلی آن ۳/۵ اینچ است.

مسأله سوم (۹ نمره ۴۵ دقیقه):

در یک سالن تئاتر محلی، از یک تیر موقت برای نگه داشتن سن استفاده می‌شود. بار وارد بر این تیر 2 kN/m است. مدیر صحنه بر این باور است که استفاده از یک تیر چوبی ساده‌ی $10\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ کافی است. اما مهندس مشاور می‌گوید که باید پایه‌های بیشتری استفاده نمود و نصب یک صفحه‌ی فولادی به ضخامت 0.5 cm در بالا و یک صفحه‌ی فولادی به ضخامت 1.0 cm در پایین را توصیه می‌نماید.

معلومات مسأله عبارتند از:

- تنش شکست چوب و فولاد به ترتیب 50 MPa و 250 MPa است.
- مدول یانگ چوب و فولاد به ترتیب 12 GPa و 200 GPa است.
- تیر از دو جنس صنوبر داگلاس و فولاد است.
- بار وارد بر تیر 2 kN/m است.
- دهانه‌ی سن 5 m است.



الف- ممان بیشینه را پیدا کنید ($wl^2/8$).

ب- محور خنثی را پیدا کنید (این محور در مرکز نیست چون این تیر نامتقارن، مرکب و از دو جنس ساخته شده است).

ج- ممان اینرسی هر دو ماده را حول محور خنثی پیدا کنید.

د- تنش خمشی بیشینه در فولاد و چوب را در این تیر (که از دو ماده ساخته شده است) را حساب کنید.

و- آیا اگر تیر تنها از چوب ساخته شود، ایمنی دارد؟

ز- توزیع تنش خمشی در سطح مقطع را محاسبه کنید.

موفق باشید..

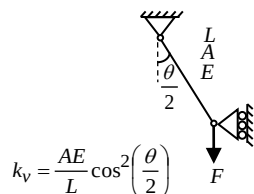
(تابش پور)

حل مسأله اول:

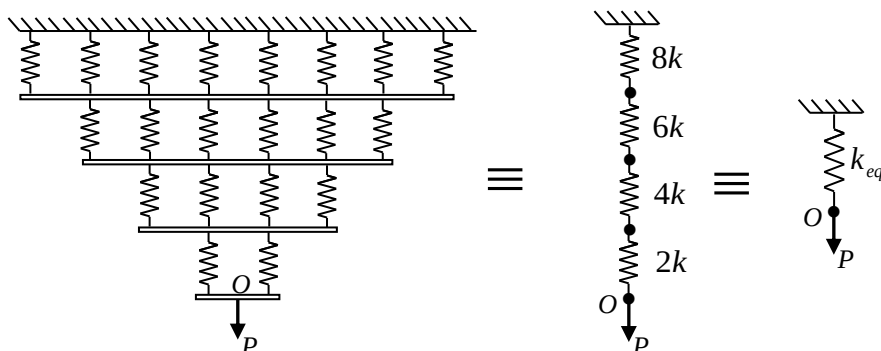
سختی قائم هر یک از میله ها طبق شکل زیر برابر است با:

$$k = \frac{AE}{L} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\theta = 2\alpha$$



اعضا سازه را با فنرهایی با سختی قائم یکسان k_v جایگزین می کنیم:



فنرهای هم تراز در شکل (۷۷) بصورت موازی با هم عمل می کنند که در این صورت می توان شکل (۷۷) را به شکل (۷۸) ساده سازی کرد. همچنین فنرهای شکل (۷۸) تحت بار اعمالی بصورت سری عمل میکنند که میتوان شکل (۷۸) را به شکل (۷۹) ساده کرد. سختی معادل برای شکل (۷۹) برابر است با:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{8k} + \frac{1}{6k} + \frac{1}{4k} + \frac{1}{2k} = \frac{25}{24k}, \quad k_{eq} = \frac{24}{25}k$$

$$F = k\Delta \rightarrow \Delta = \frac{F}{k_{eq}} = \frac{25}{24} \frac{F}{k} = \frac{25}{24} \frac{PL}{AE \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

حل مسأله دوم:

در این مثال، یک ممان نقطه‌ای در سر مته وجود دارد و یک ممان گسترده‌ی ثابت مطابق شکل ایجاد می شود. بنابراین، ممان 15 kip-ft موتور مته با بار اصطکاک گسترده‌ی ثابت در امتداد مته مواجه می شود. این بار اصطکاک نصف بار وارده است و در امتداد مته توزیع می شود.

$$M_{friction} = (M/2)x/L = (15 \text{ kip-ft}/2)x/100 \text{ ft} = 0.075x \text{ kip-ft}$$

سر مته دارای ممان نقطه‌ای نصف ممان وارد است یا:

$$M_{drill head} = M/2 = 15 \text{ kip-ft}/2 = 7.5 \text{ kip-ft}$$

ممان داخلی واقعی (یا گشتاور) با ممان وارده یکسان نیست. می توان یک نمودار ممان داخلی را ترسیم کرد که تغییر ممان را به صورت تابعی از عمق نشان می دهد. در بالای این مته، یک ممان 15 kip-ft وجود دارد که به تدریج در اثر اصطکاک کم می شود. در سر مته دار لوله‌ی حفاری، ممانی داخلی 7.5 kip-ft باقی می ماند. از این ممان برای حفاری واقعی استفاده می شود. نتیجه را می توان به صورت تابع زیر نشان داد:

$$T(x) = 15 - 0.075x \text{ kip-ft}$$

(که در آن x بر حسب فوت است).

اکنون تابع ممان داخلی تعیین شده است و می توان زاویه‌ی کل پیچش را به صورت زیر به دست آورد:

$$\theta = \int_0^L \frac{T(x) dx}{G(x) J(x)}$$

مدول برشی G و ممان اینرسی قطبی و ثابت است و می تواند از انتگرال خارج شود:

$$\theta = \frac{1}{GJ} \int_0^{100} (15 - 0.075x) dx$$

می‌توان G و J را به صورت زیر حساب کرد:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{29,000}{2(1+0.29)} = 11,240 \text{ ksi}$$

$$J = \frac{\pi}{2} (r_o^4 - r_i^4) = \frac{\pi}{2} (2^4 - 1.75^4) = 10.40 \text{ in}^4$$

همچنین، این ممان باید $kip-ft$ به $kip-in$ تبدیل شود. با ترکیب داریم:

$$\theta = \frac{12 \text{ in} / ft}{(11,240)(10.40)} [15x - 0.0375x^2]_0^{100} \\ = (1.207 \times 10^{-4})(1,500 - 375) = 0.1155 \text{ radians}$$

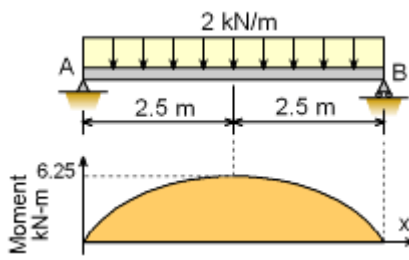
$$\theta = 6.617 \text{ degrees}$$

حل مسأله دوم:

این تیر کامپوزیتی و ترکیبی از دو جنس می باشد حتی اگر سه بخش داشته باشد: چوب یک ماده و دو صفحه فولادی هم، یک ماده به حساب می‌آیند که دارای دو بخش است. موضوع اول یافتن ممان بیشینه واقعی است که در معادلات تنش خمشی تیر کامپوزیت مورد نیاز است. سپس باید محل محور خنثی را مشخص کرد و به کمک این دو، ممان اینرسی واقعی هر ماده را پیدا کرد:

الف- ممان بیشینه

برای به دست آوردن تنش خمشی بیشینه، باید ممان خمشی بیشینه را به دست آوریم. این ممان تابعی از سطح مقطع نیست و می‌توان به کمک نمودار ممان آن را به دست آورد. در این نوع بارگذاری رایج، ممان بیشینه در مرکز تیر است.



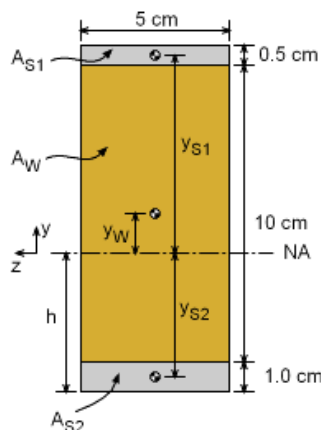
دیاگرام بارگذاری و خم

اگر در مرکز تیر یک مقطع بزنیم و تعادل لنگر برقرار کنیم داریم:

$$M - 5(2.5) + 2(2.5)(2.5/2) = 0 \rightarrow M = 6,250 \text{ N-m}$$

ب- محور خنثی

محل محور خنثی (NA) از جمله مراحل بسیار مهم در به دست آوردن تنش‌های خمشی در تیرهای کامپوزیت است. به دست آوردن ممان اینرسی و فاصله از لبه‌ی بیرونی دو ماده نیازمند یافتن محل محور خنثی است.



سطح مقطع تیر

تارخنثی، NA، را می‌توان از معادله زیر به دست آورد:

$$0 = E_W Q_W + E_S Q_S$$

قسمت فولادی دو بخش ۱ و ۲ دارد:

$$0 = E_W (y_W A_W) + E_S [(y_{S1} A_{S1}) + (y_{S2} A_{S2})] \\ = 12(5+1-h)(5)(10) + 200[(10+1+0.5-0.25-h)(5)(0.5) + (-h+0.5)(5)(1)] \\ = 3,600 - 600h + 5,625 - 500h + 500 - 1000h \\ 9,725 = 2,100h \rightarrow h = 4.631 \text{ cm}$$

اکنون فاصله h معلوم است و مرکز تمام سطوح به کمک تارخنثی به دست می‌آید:

ج- ممان اینرسی هر ماده

بعد از یافتن محور خنثی، ممان اینرسی حول NA برای هر سطح ماده را می توان حساب کرد. با استفاده از فرمول های اصلی ممان اینرسی سطوح مستطیلی، و به کمک تئوری محور موازی داریم:

$$I_W = h^3 b / 12 + y_W^2 A_W = 10^3 (5) / 12 + 1.369^2 (10)(5) = 510.4 \text{ cm}^4$$

$$I_S = I_{S1} + I_{S2}$$

$$= h^3 b / 12 + y_{S1}^2 A_{S1} + h^3 b / 12 + y_{S2}^2 A_{S2}$$

$$= 0.5^3 (5) / 12 + 6.619^2 (0.5)(5) + 1^3 (5) / 12 + (-4.131)^2 (1)(5) = 195.3 \text{ cm}^4$$

د- تنش خمشی بیشینه

اکنون می توان تنش خمشی در هر سطح ماده را با استفاده از معادلات تنش خمشی یک تیر کامپوزیت دو ماده ای به دست آورد. دو معادله وجود دارد چون هر قسمت از تیر دارای تنش متفاوتی است:

$$\sigma_W = \frac{-My_{W-\max} E_W}{E_W I_W + E_S I_S}, \quad \sigma_S = \frac{-My_{S-\max} E_S}{E_W I_W + E_S I_S}$$

فاصله ی y حداکثر فاصله از محور خنثی برای هر قسمت از مواد سازنده ی تیر است:

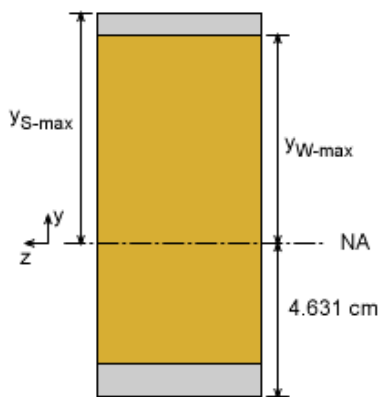
$$y_{W-\max} = (10 + 1 + 0.5) - (0.5 + 4.631) = 6.369 \text{ cm}$$

$$y_{S-\max} = (10 + 1 + 0.5) - 4.631 = 6.869 \text{ cm}$$

با جایگزینی مقادیر در هر دو معادله تنش داریم:

$$\sigma_W = \frac{-(6,250)(6.369)(12)}{12(510.4) + 200(195.3)} = -10.57 \text{ MPa}$$

$$\sigma_S = \frac{-(6,250)(6.869)(200)}{12(510.4) + 200(195.3)} = -190.0 \text{ MPa}$$

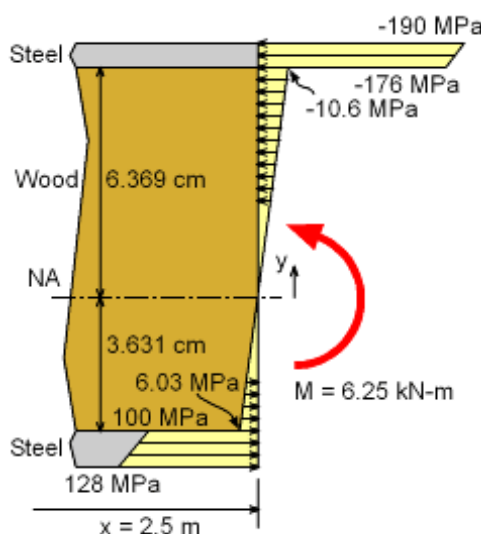


سطح مقطع تیر

این تیر می شکند حتی اگر تنش خمشی در چوب کمتر از تنش شکست چوب 50 MPa باشد چون تنش خمشی بیشینه در فولاد بیش از 150 MPa است. اگر این تیر فقط چوبی باشد، باز هم می شکند زیرا تنش خمشی بیشینه 75 MPa است (محاسبات در این جا نیامده است).

که از تنش شکست 50 MPa بیشتر است.

ز- توزیع تنش خمشی



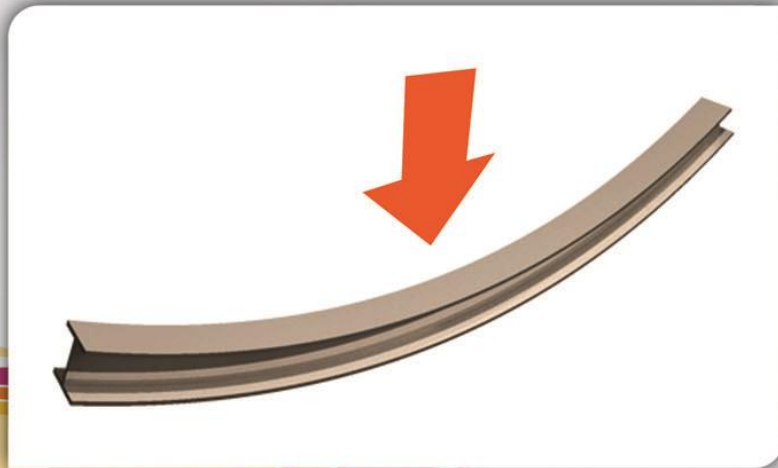
توزیع تنش خمشی وسط دهانه تیر در سطح مقطع تیر

برای درک هرچه بهتر چگونگی تغییر تنش خمشی در تیر، در شکل این روند نمایش داده شده است. توجه داشته باشید که تنش خمشی در فصل مشترک دو ماده جهش دارد زیرا سختی مواد در این قسمت جهش دارد (مدول یانگ). از طرفی، کرنش بدون جهش است زیرا از بالا تا پایین پیوسته است.

برگرفته از کتاب زیر (در حال نهایی سازی):



مقاومت مصالح ۱



مقاومت مصالح

دکتر محمدرضا تابش پور



فدک
ایستادیس

دکتر محمدرضا تابش پور