

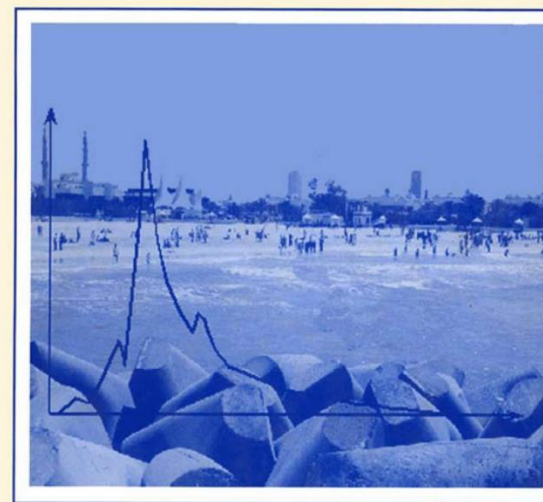
تحلیل آماری و تصادفی کوتاه-مدت امواج دریا (خرداد ۹۶، تابش پور)
مرجع اصلی (فصل سوم)

مطالب این کارگاه در کتاب زیر به زودی چاپ می شود:

تحلیل تصادفی امواج و سازه های دریایی

Advanced Series on Ocean Engineering — Volume 16

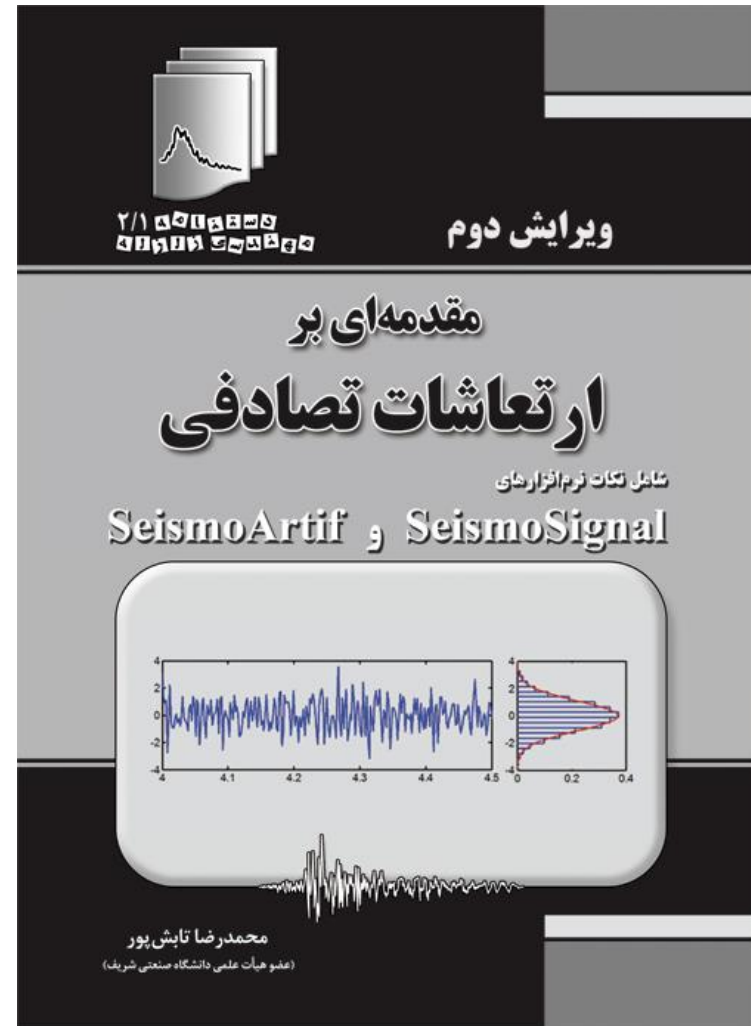
INTRODUCTION TO
COASTAL ENGINEERING
AND MANAGEMENT



J. William Kamphuis

World Scientific

مرجع کمکی (خلاصه کتاب زیر):



این کتاب زودی با اصلاحات و اضافات و با عنوان زیر چاپ
می‌شود:

تحلیل تصادفی امواج و سازه‌های دریایی

تحلیل آماری و تصادفی کوتاه-مدت امواج دریا

مقدمه‌ای بر آمار و احتمال مهندسی

پ-۱۴.۱ آمار و احتمال

ماهیت اکثر مسائل کمی و کیفی طوری است که با یک جامعه‌ی آماری مواجه هستیم. هر پارامتر مورد مطالعه در جامعه‌ی مورد نظر، ممکن است از یک نمونه به نمونه‌ی دیگر تغییر کند و دارای پراکندگی باشد معمولاً هرچند داده‌ها با هم متفاوتند ولی میانگین آن‌ها اغلب شاخص بسیار مفیدی در مطالعات و کاربردهای مهندسی می‌باشد، در نتیجه میانگین جزء اولین پارامترهایی است که در یک مجموعه محاسبه می‌شود.

به‌عنوان مثال، نتایج حاصل از ۲۳ تست کشش مستقیم فولاد را مطابق زیر در نظر بگیرید:

۲۲۴۳، ۲۲۶۴، ۲۲۸۹، ۲۳۱۶، ۲۳۴۸، ۲۳۴۸، ۲۳۶۰، ۲۳۶۷، ۲۳۷۰، ۲۳۷۴، ۲۳۸۱، ۲۳۸۶، ۲۳۸۷، ۲۳۹۱، ۲۴۰۰، ۲۴۱۰،
۲۴۱۲، ۲۴۲۰، ۲۴۲۴، ۲۴۴۴، ۲۴۴۸، ۲۴۵۲، ۲۴۸۷

اکنون اگر بخواهیم میانگین این داده‌ها را محاسبه کنیم باید تمامی آن‌ها را باهم جمع و سپس بر ۲۳ تقسیم کنیم. این کار در محاسبات آماری، متداول نیست. آنچه متخصصان آمار انجام می‌دهند این است که ابتدا تمامی داده‌ها را در بازه‌های مناسبی دسته‌بندی می‌کنند. برای مثال مورد بررسی، دسته‌بندی داده‌ها در جدول زیر ارائه شده است.

تعداد	بازه
۱	کمتر از ۲۲۵۰
۲	بین ۲۲۵۰ تا ۲۳۰۰
۳	بین ۲۳۰۰ تا ۲۳۵۰
۸	بین ۲۳۵۰ تا ۲۴۰۰
۷	بین ۲۴۰۰ تا ۲۴۵۰
۲	بین ۲۴۵۰ تا ۲۵۰۰

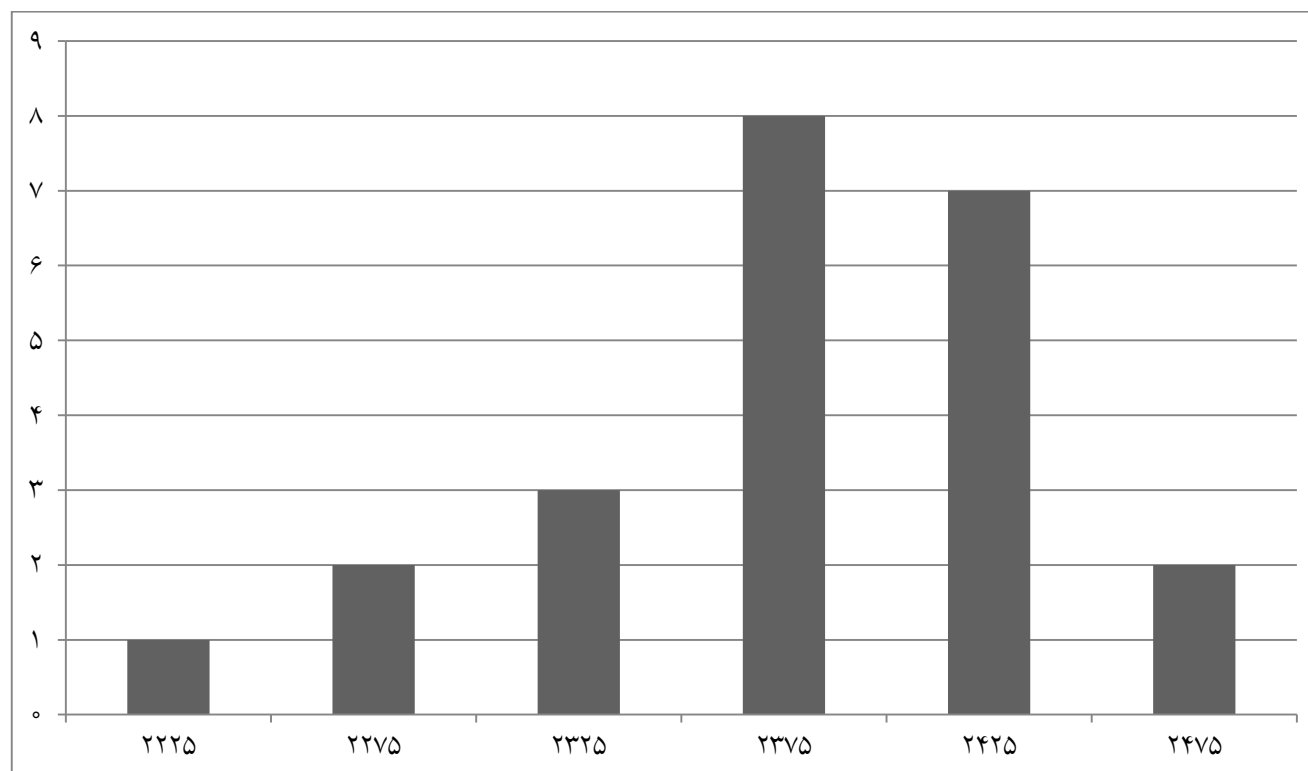
توجه شود که می‌توان بازه‌ای دیگری برای دسته‌بندی این اعداد در نظر گرفت. داده‌های کل این «نمونه آماری» در جدول بالا ارائه شده است یعنی کل «آمار» این جامعه‌ی کوچک. اکنون می‌توان مطالعات آماری را انجام داد که ساده‌ترین آن‌ها تعیین میانگین می‌باشد. معمولاً محاسبه‌ی میانگین به‌صورت زیر انجام می‌شود:

دسته	بازه	تعداد	مرکز بازه	حاصل جمع مقادیر دسته
۱	کمتر از ۲۲۵۰	۱	۲۲۲۵	۱×۲۲۲۵
۲	بین ۲۲۵۰ تا ۲۳۰۰	۲	۲۲۷۵	۲×۲۲۷۵
۳	بین ۲۳۰۰ تا ۲۳۵۰	۳	۲۳۲۵	۳×۲۳۲۵
۴	بین ۲۳۵۰ تا ۲۴۰۰	۸	۲۳۷۵	۸×۲۳۷۵
۵	بین ۲۴۰۰ تا ۲۴۵۰	۷	۲۴۲۵	۷×۲۴۲۵
۶	بین ۲۴۵۰ تا ۲۵۰۰	۲	۲۴۷۵	۲×۲۴۷۵

اکنون با جمع کردن حاصل جمع‌های تمام دسته‌ها و تقسیم آنها بر ۲۳، میانگین محاسبه می‌شود:

$$\text{میانگین} = \frac{۵۴۶۷۵}{۲۳} = ۲۳۷۷$$

به جای نشان دادن اعداد در جدول می توان آن ها را به صورت نمودار میله ای مطابق شکل پ-۳۲.۱ نشان داد.

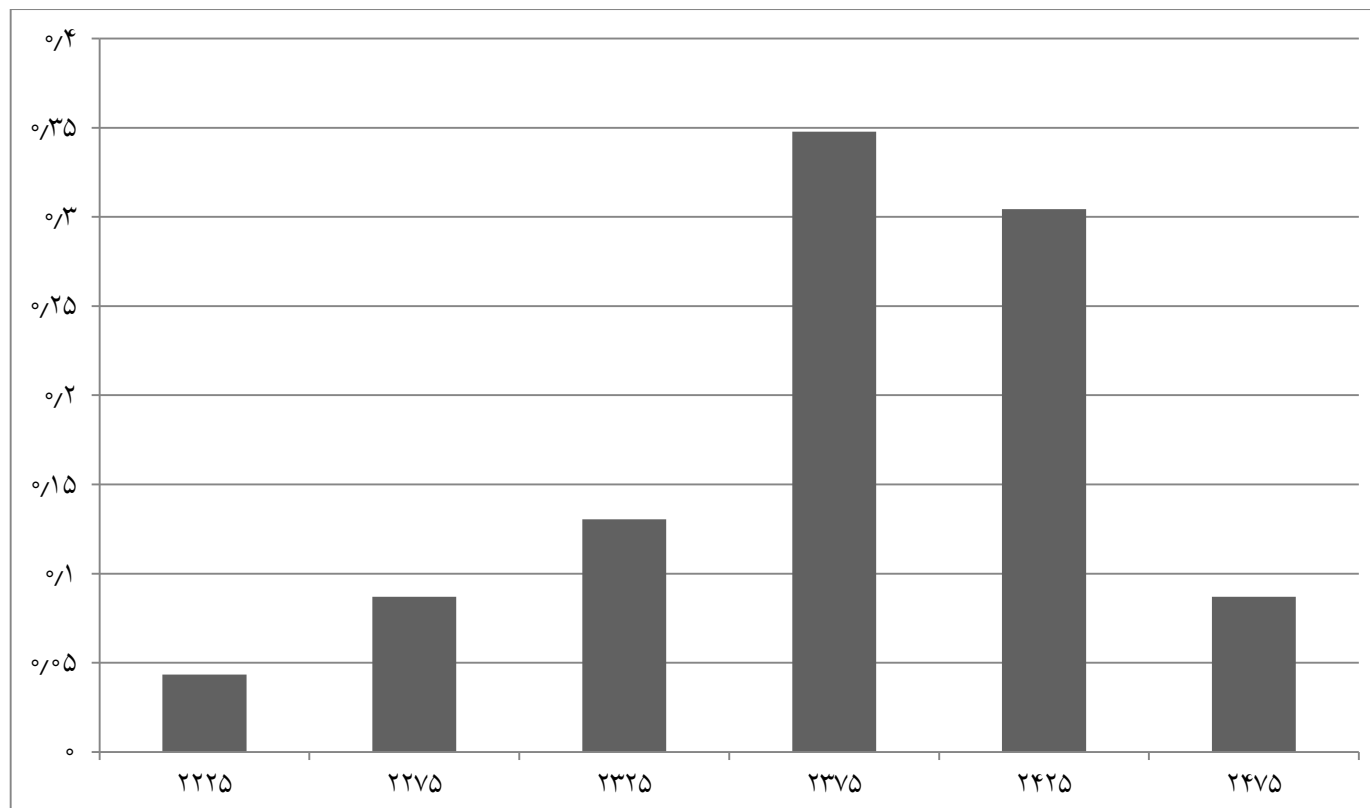


شکل پ-۳۲.۱ نمایش فراوانی هر دسته به صورت نمودار میله ای

اکنون می‌خواهیم ارتباط بین «آمار» و «احتمال» را بررسی کنیم. می‌توان با تقسیم تعداد در هر دسته به تعداد کل، احتمال رخداد آن دسته را تعیین کرد، مثلاً احتمال آنکه مقاومت بین ۲۳۰۰ تا ۲۳۵۰ باشد مساوی $\frac{۳}{۲۳}$ است.

دسته	بازه	نسبت تعداد به تعداد کل = احتمال
۱	کمتر از ۲۲۵۰	$\frac{۱}{۲۳}$
۲	بین ۲۲۵۰ تا ۲۳۰۰	$\frac{۲}{۲۳}$
۳	بین ۲۳۰۰ تا ۲۳۵۰	$\frac{۳}{۲۳}$
۴	بین ۲۳۵۰ تا ۲۴۰۰	$\frac{۸}{۲۳}$
۵	بین ۲۴۰۰ تا ۲۴۵۰	$\frac{۷}{۲۳}$
۶	بین ۲۴۵۰ تا ۲۵۰۰	$\frac{۲}{۲۳}$

اکنون اگر مقادیر جدول بالا را به صورت نمودار رسم کنیم به آن چگالی احتمال می‌گوییم.



شکل پ-۳۳.۱ تابع چگالی احتمال

به این منحنی، «تابع چگالی احتمال» می‌گویند.

در مثال قبل فرض کنید قرار است که نتایج حاصل از این آزمایش کششی در کارهای **طراحی** استفاده شود. قطعاً سوالات اساسی زیر برای طراح اهمیت دارد:

چه مقاومت کششی را برای طراحی در نظر بگیریم؟

اگر جواب سوال بالا مثلاً ۲۳۸۰ کیلوگرم بر سانتی مترمربع باشد، چقدر احتمال دارد که مقاومت عضو کمتر از ۲۳۵۰ باشد؟ با فرض فوق، با چه احتمالی مقاومت بین ۲۳۵۰ تا ۲۴۰۰ است؟ برای پاسخ‌گویی به سوالاتی نظیر آنچه در بالا مطرح شد، محاسبات آماری ساده‌ای را به جدول قبلی می‌افزاییم.

تعداد	بازه
۱	کمتر از ۲۲۵۰
$۱+۲=۳$	کمتر از ۲۳۰۰
$۱+۲+۳=۶$	کمتر از ۲۳۵۰
$۱+۲+۳+۸=۱۴$	کمتر از ۲۴۰۰
$۱+۲+۳+۸+۷=۲۱$	کمتر از ۲۴۵۰
$۱+۲+۳+۸+۷+۲=۲۳$	کمتر از ۲۵۰۰

به این صورت تعداد تجمعی هر دسته محاسبه می‌شود. اکنون به سادگی می‌توانیم محاسبه کنیم که:

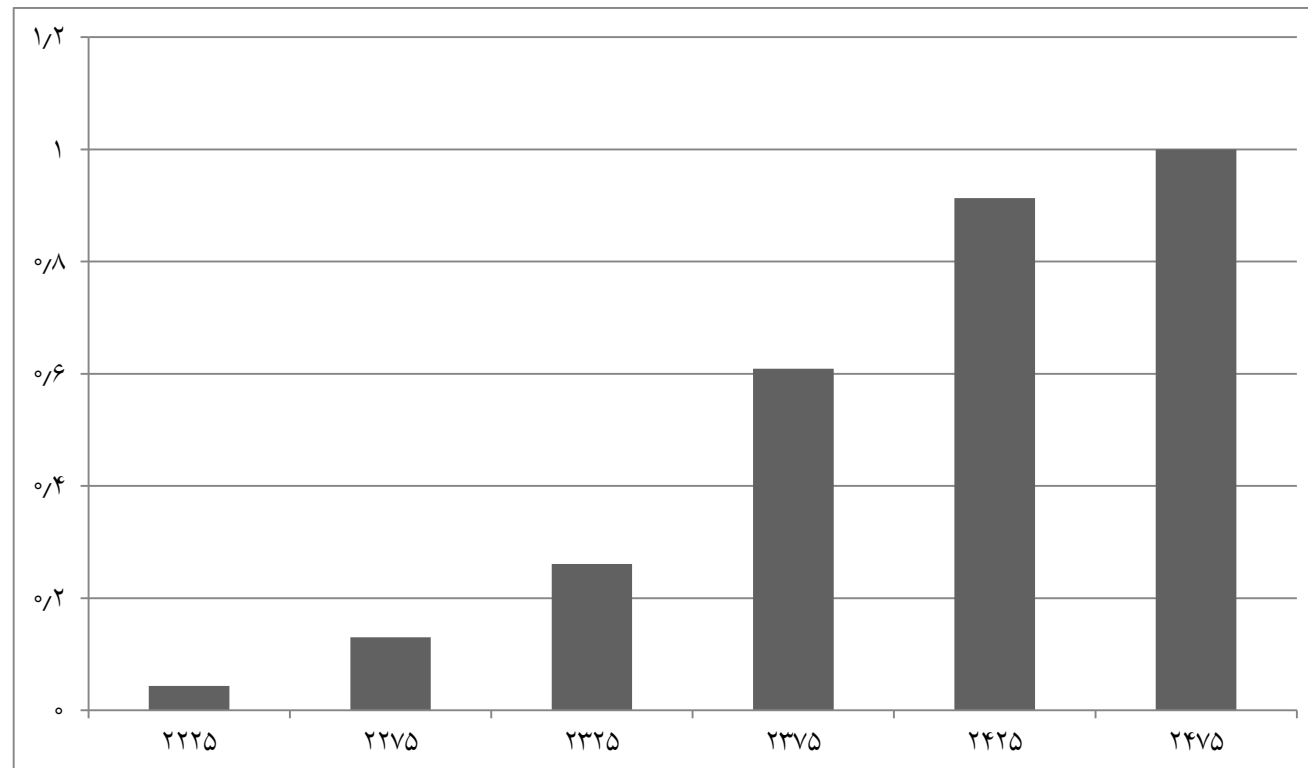
احتمال آنکه مقاومت کمتر از ۲۴۰۰ باشد چقدر است؟ $\frac{۱۴}{۲۳}$

احتمال آنکه مقاومت بین ۲۳۰۰ تا ۲۴۰۰ باشد؟ $\frac{۶+۱۴}{۲۳}$

اکنون که به اهمیت و کاربرد چنین محاسباتی واقف شدیم، کلاً آن را در جدول وارد می‌کنیم؛ به این صورت که تعداد ارائه شده در جدول بالا را به تعداد کل تقسیم می‌کنیم.

بازه	نسبت تعداد به تعداد کل = چگالی احتمال
کمتر از ۲۲۵۰	$\frac{۱}{۲۳}$
کمتر از ۲۳۰۰	$\frac{۳}{۲۳}$
کمتر از ۲۳۵۰	$\frac{۶}{۲۳}$
کمتر از ۲۴۰۰	$\frac{۱۴}{۲۳}$
کمتر از ۲۴۵۰	$\frac{۲۱}{۲۳}$
کمتر از ۲۵۰۰	$\frac{۲۳}{۲۳} = ۱$

اکنون نمودار میله‌ای جدول فوق را رسم می‌کنیم.



شکل پ-۳۴.۱ تابع توزیع احتمال

منحنی فوق به نام «تابع توزیع احتمال» معروف است.

یکی دیگر از پارامترهای مهم و تعیین کننده، مقدار برآیند پراکندگی های اعداد نسبت به میانگین می باشد. ممکن است دو جامعه دارای میانگین یکسان باشند ولی پراکندگی (تغییرات، Variation) کاملاً متفاوتی باشند در نتیجه علاوه بر میانگین، هر پارامتری که به نحوی پراکندگی داده ها حول میانگین را نشان دهد، می تواند بخشی از ویژگی آن جامعه باشد. اکنون با فرض x_i برای پارامتر مورد نظر که از یک عضو جامعه به عضو دیگر تغییر می کند، می توان ساده ترین نوع میانگین را به صورت زیر تعریف کرد که در آن توان متغیر مساوی ۱ است و علامت متغیر (مثبت و یا منفی) در نظر گرفته می شود:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

یکی از راه های تعیین پراکندگی، محاسبه ی مقدار فاصله ی هر عدد تا میانگین است که سپس با یکدیگر جمع و به تعداد داده ها تقسیم می شود:

$$\text{پراکندگی} = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}|}{N}$$

هرچند تعریف پراکندگی به صورت معادله بالا، درک خوبی به انسان می دهد ولی برای تعیین فاصله به جای علامت قدرمطلق می توان از $\sqrt{(x_i - \bar{x})^2}$ استفاده کرد. توجه شود که:

$$\sqrt{(x_i - \bar{x})^2} = |x_i - \bar{x}|$$

همچنین می‌توان مربع فواصل تا میانگین را به‌عنوان شاخص پراکندگی تعریف کرد:

$$\text{پراکندگی} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N^2}$$

همچنین با توجه به اینکه معادله بالا به‌صورت مربعات است می‌توان شاخص پراکندگی جدیدی به‌صورت زیر نیز تعریف کرد:

$$\text{پراکندگی} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N^2}} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

آنچه در بالا توضیح داده‌شد در ادبیات آمار و احتمال به‌صورت زیر نشان داده‌می‌شود:

$$\text{واریانس} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N^2}$$

$$\text{انحراف معیار} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

با توجه به توضیحات بالا، اهمیت «واریانس» کاملاً روشن است.

اگر میانگین داده‌ها صفر باشد، واریانس به‌صورت ساده‌تر بازنویسی می‌شود:

$$\text{واریانس} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N}$$

و:

$$\text{انحراف معیار} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}}{N}$$

اکنون می‌توان گفت:

واریانس عبارت است از میانگین مربعات

اندکی به این فکر کنید که آنچه نشان‌دهنده‌ی مقدار پراکندگی حول میانگین است، خودش نیز نوعی میانگین است.

مقدمه‌ای بر توزیع‌های احتمال و میانگین‌ها

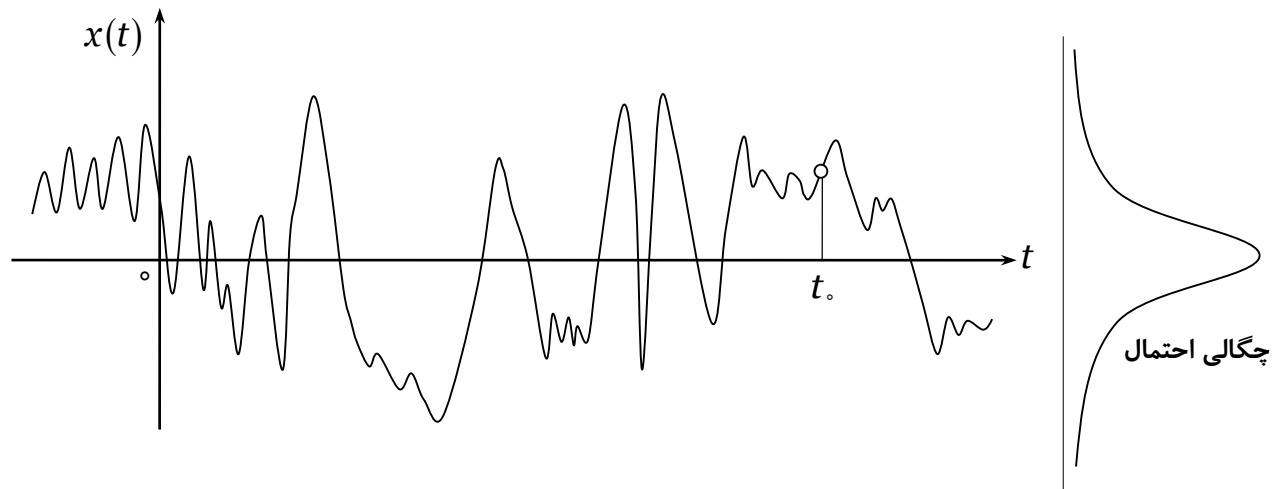
۱.۱ تعریف ارتعاشات تصادفی

اگر حرکت ارتعاشی یک سیستم، قابل پیش‌بینی نباشد، به آن ارتعاش تصادفی گفته می‌شود. موضوع ارتعاشات تصادفی عبارت است از:

بررسی و تعیین وابستگی خصوصیات آماری پاسخ سیستم به خصوصیات آماری تحریک (مانند باد، موج و زلزله) و خواص ارتعاشی سیستم (مانند جرم، سختی و میرایی).

یادآوری می‌کند که خواص آماری مهم عبارتند از میانگین و واریانس (پراکندگی). در تئوری ارتعاشات تصادفی رابطه بین میانگین و واریانس تحریک با میانگین و واریانس پاسخ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در شکل ۱.۱ نمونه‌ای از تاریخچه‌ی زمانی پاسخ یک سیستم تحت ارتعاش تصادفی، نشان داده شده است.

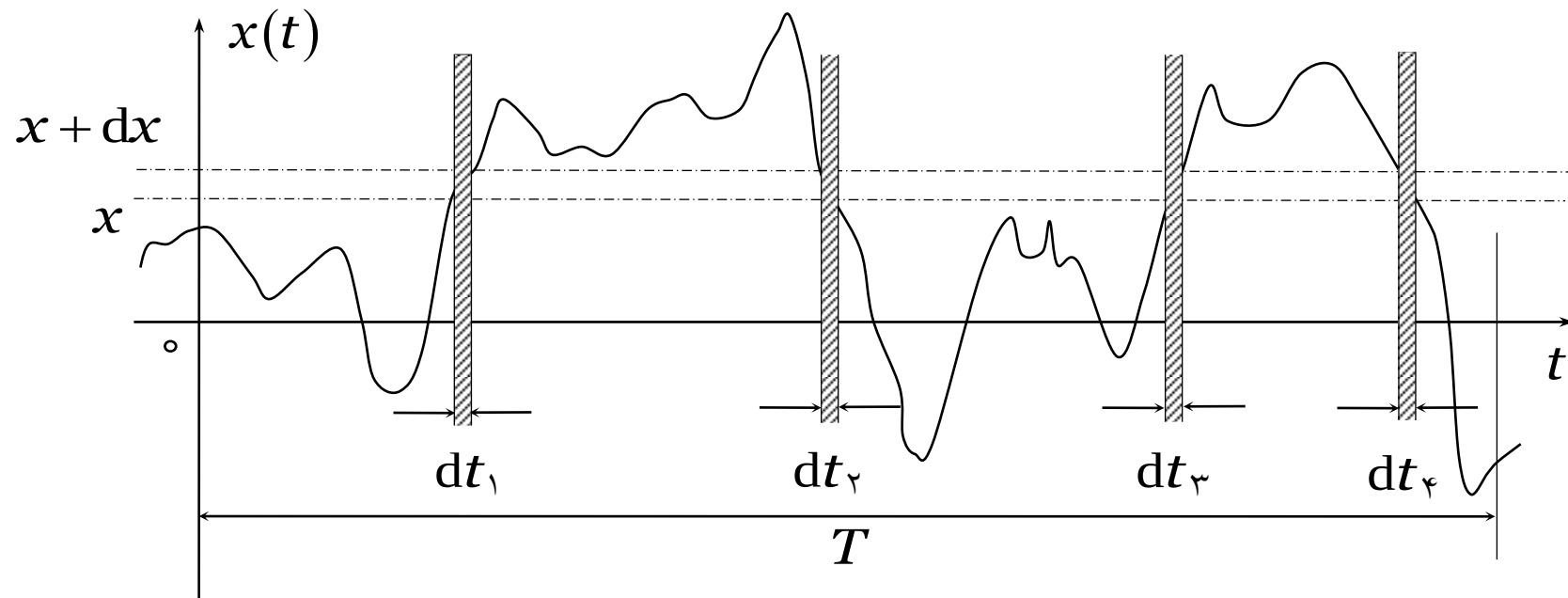


شکل ۱.۱ نمونه‌ای از تاریخچه زمانی پاسخ یک سیستم تحت ارتعاش تصادفی

سوال مهم: آیا می‌توان از روی یک و فقط یک رکورد، میانگین و واریانس و در حالت کلی تر، تابع چگالی احتمال را بدست آورد.

۲.۱ تابع چگالی احتمال (Probability Density Function)

$$p(x)dx = \text{کسری از زمان که } x(t) \text{ بین } x \text{ و } x+dx \text{ قرار دارد} = \frac{(dt_1 + dt_2 + dt_3 + \dots)}{T} = \frac{\sum dt}{T} \quad (۹.۱)$$

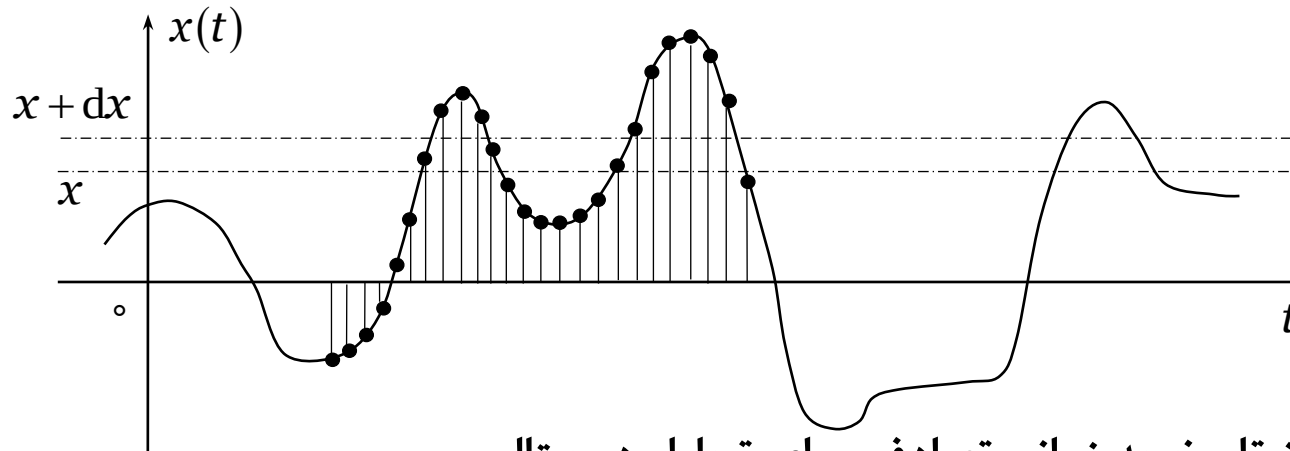


شکل ۶.۱ محاسبه چگالی احتمال برای فرآیند تصادفی

اگر مطابق شکل ۷.۱ به تعداد N مقدار نمونه وجود داشته باشد و تعداد dn از این مقادیر در بازه x تا $x+dx$ قرار گیرد، با توجه به معادله ۹.۱ می‌توان نوشت:

$$p(x)dx = \frac{dn}{N} \quad (۱۰.۱)$$

کسری از تعداد کل نمونه که بین x تا $x + dx$ قرار دارد



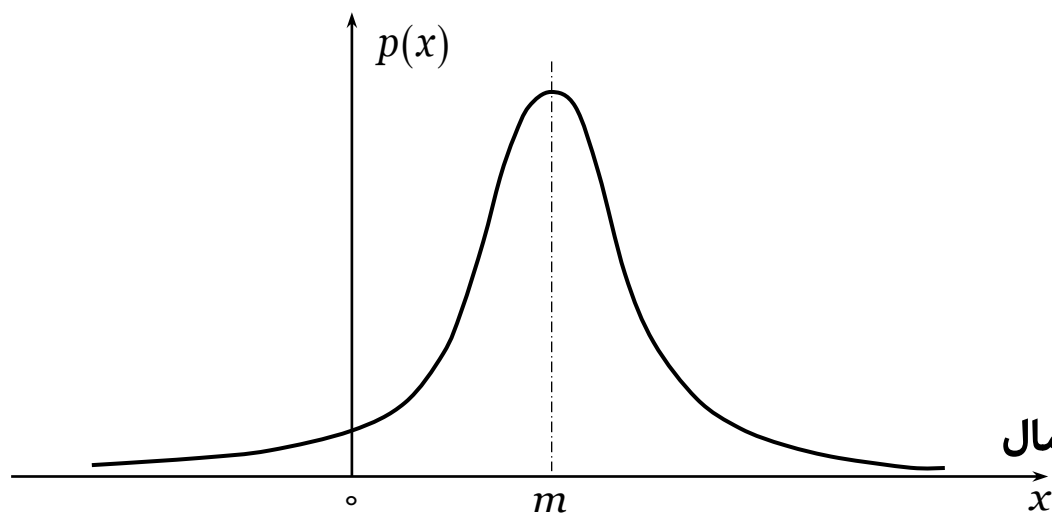
شکل ۷.۱ نمونه‌گیری از تاریخچه زمانی تصادفی برای تحلیل دیجیتالی

جواب به سوال مهم قبل:

سوال مهم: آیا می‌توان از روی یک و فقط یک رکورد، میانگین و واریانس و در حالت کلی تر، تابع چگالی احتمال را بدست آورد.

توجه شود که به این صورت یک تابع تبدیل می‌شود به یک بردار که هریک از درایه‌های آن، مقدار تابع در نقاط مختلف است.

۳.۱ توزیع گاوسی



شکل ۸.۱

تابع چگالی احتمال گاوسی یا نرمال

این تابع به صورت زیر است:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} \quad (11.1)$$

که m و σ مقادیر ثابتی هستند.

۴.۱ محاسبه میانگین

مقدار میانگین x را با $E[x]$ که یک شاخص مرتبط با میزان پراکندگی متغیر x است، نشان داده و می‌خوانیم: مقدار مورد انتظار یا میانگین x . با مراجعه به شکل ۶.۱ مقدار میانگین تاریخچه زمانی x بر روی بازه T طوری تعریف می‌شود که:

$$T(E[x])T = \int_0^T x(t) dt = \text{سطح کل زیر منحنی } x(t) \text{ در بازه}$$

و بنابراین:

$$E[x] = \int_0^T x(t) \frac{dt}{T} \quad (۱۲.۱)$$

مهم:

تعریف متوسط زمانی:

$$\hat{m}_x(t)_T = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

این را میانگین تیپ ۱ یا میانگین زمانی می‌نامیم.

سمت راست معادله ۱۲.۱ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum_t x(t) \int_0^T x(t) \frac{dt}{T} = (\text{کسری از زمان صرف شده که } x(t) \text{ بین } x \text{ و } x + dt \times dx/dt \text{ قرار می‌گیرد})$$

$$= \sum_t x(t) (\text{کسری از زمان صرف شده که } x(t) \text{ بین } x \text{ و } x + dx \text{ قرار می‌گیرد})$$

اکنون با توجه به معادله ۹.۱ می‌توان نوشت:

$$\int_0^T x(t) \frac{dt}{T} = \sum_x (x) \cdot (p(x) dx) \quad (13.1)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx$$

با ترکیب معادلات ۱۲.۱ و ۱۳.۱ می‌توان نوشت:

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx \quad (14.1)$$

نکته مهم:

تعریف متوسط آماری:

$$m_x(t) = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx$$

این را میانگین تیپ ۲ یا میانگین آماری می نامیم.

میانگین مربعات x یعنی $E[x^2]$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$E[x^2] = \int_0^T x^2(t) \frac{dt}{T} \quad (15.1)$$

و با توجه به معادله ۱۴.۱ می توان نوشت:

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \quad (16.1)$$

می دانیم انحراف معیار (σ) و واریانس (σ^2) به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sigma^2 = E[(x - E[x])^2] \quad (17.1)$$

معادله بالا را می توان به صورت زیر ساده کرد:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[x^2 - 2xE[x] + (E[x])^2] \\ &= E[x^2] - 2E[x] \cdot E[x] + (E[x])^2 \end{aligned} \quad (18.1)$$

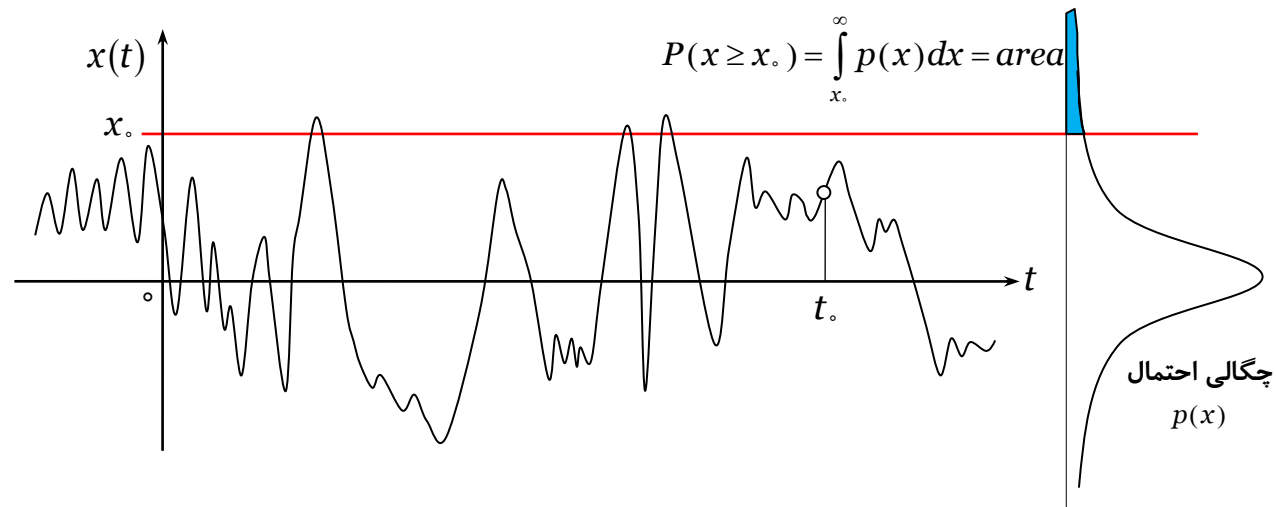
یا:

$$\sigma^2 = E[x^2] - (E[x])^2 \quad (19.1)$$

که خوانده می‌شود:

مربع میانگین - میانگین مربعات = مربع انحراف معیار = واریانس

تعریف متغیر نرمال شده به انحراف معیار با میانگین صفر:



تعریف گشتاور

گشتاور مرتبه صفرم (سطح زیر منحنی):

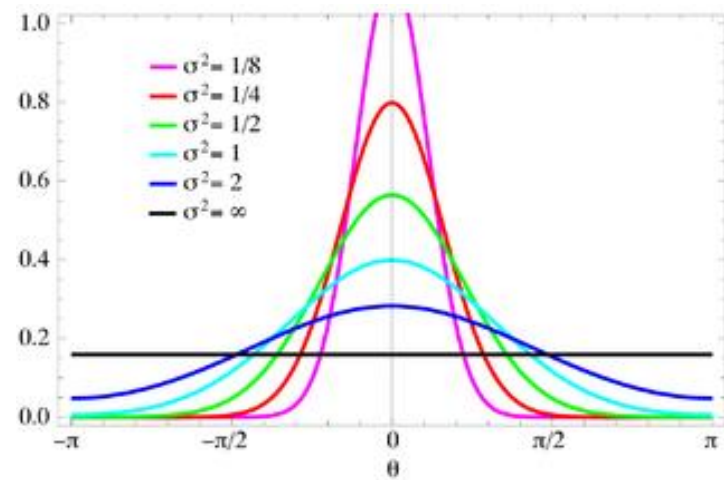
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

گشتاور مرتبه اول (میانگین):

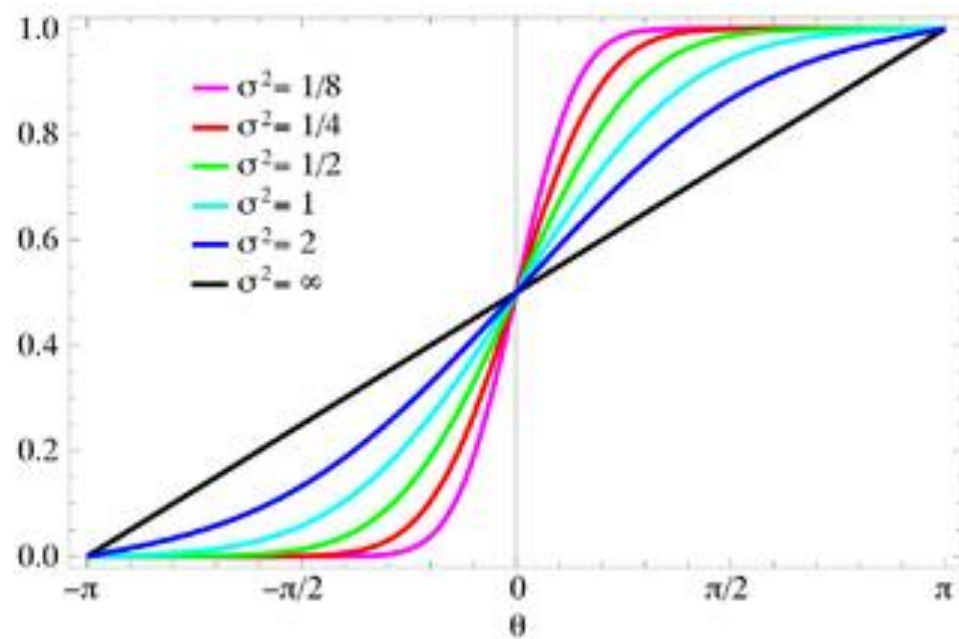
$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx = \mu_1, \quad \frac{\mu_1}{\sigma}$$

گشتاور مرتبه دوم (واریانس):

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \mu_2, \quad \frac{\mu_2}{\sigma^2}$$



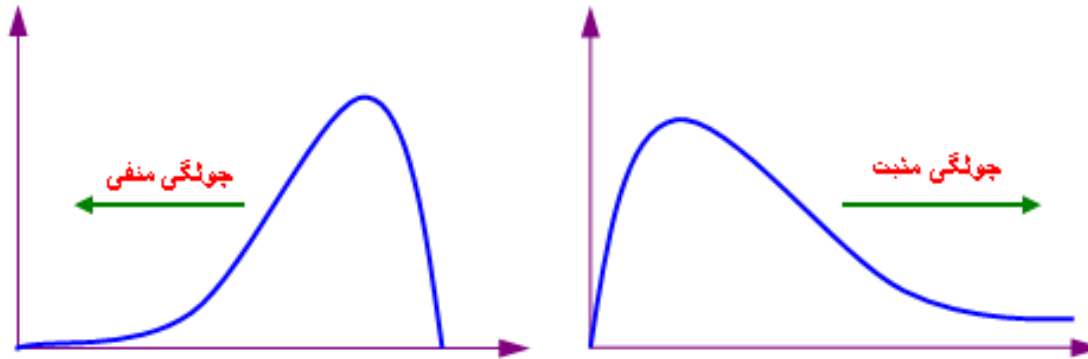
تابع چگالی احتمال



تابع تجمعی احتمال

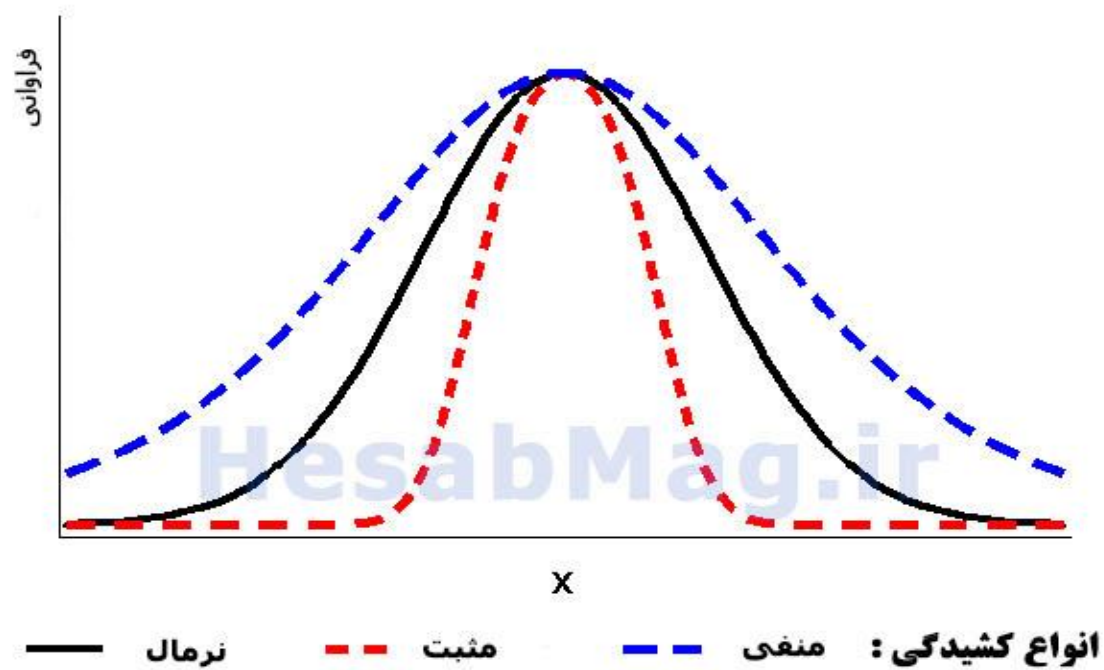
گشتاور مرتبه سوم (چولگی، *skewness*):

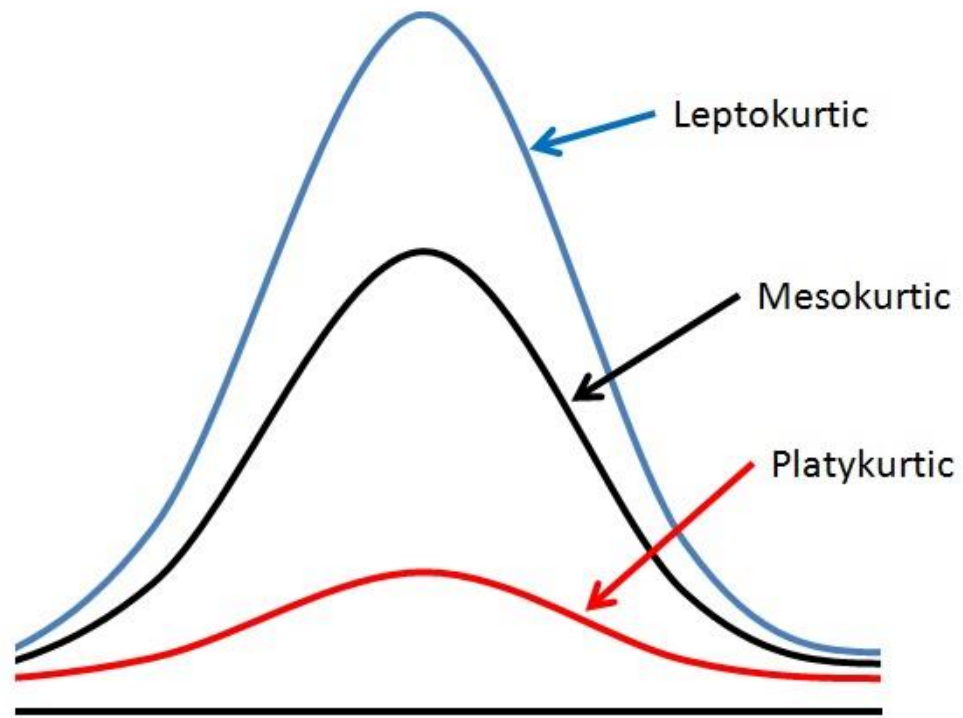
$$E[x^3] = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 p(x) dx = \mu_3, \quad \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$



گشتاور مرتبه چهارم (کشیدگی، *kurtosis*):

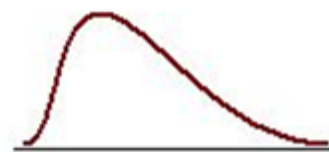
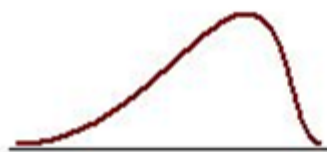
$$E[x^4] = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 p(x) dx = \mu_4, \quad \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$





کجی یا چولگی

ضریب کجی شاخصی است که میزان تقارن توزیع یک متغیر را نشان می‌دهد



کجی منفی
مقدار کجی کوچک تر از صفر

توزیع نرمال
کجی برابر با صفر

کجی مثبت
کجی بزرگ تر از صفر

کشیدگی

ضریب کشیدگی شاخصی است که میزان برآمدگی یا فرورفتگی توزیع یک متغیر را نشان می‌دهد

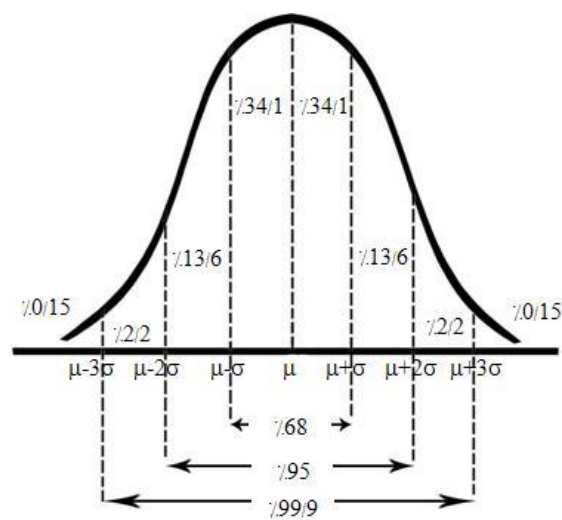
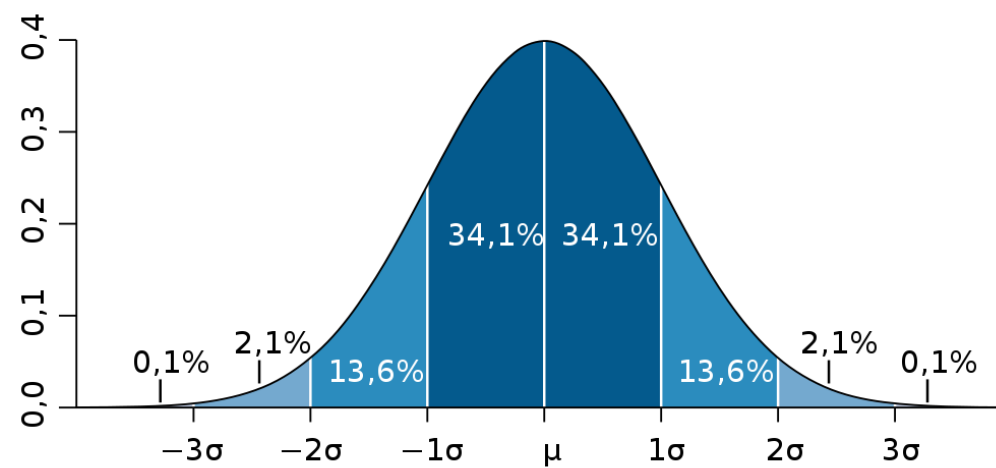


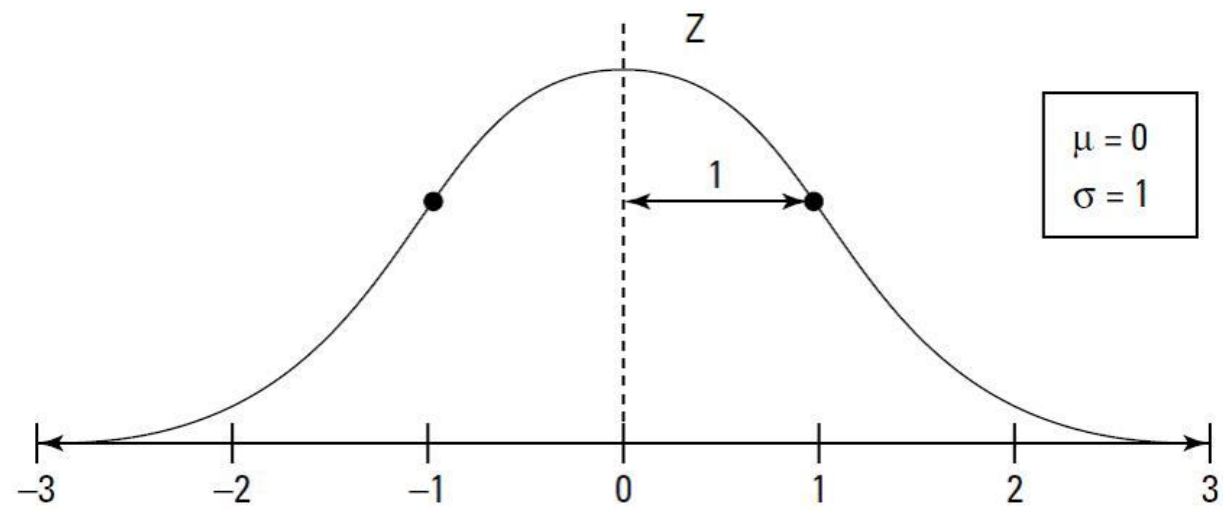
کشیدگی منفی
مقدار کشیدگی کوچک تر از صفر

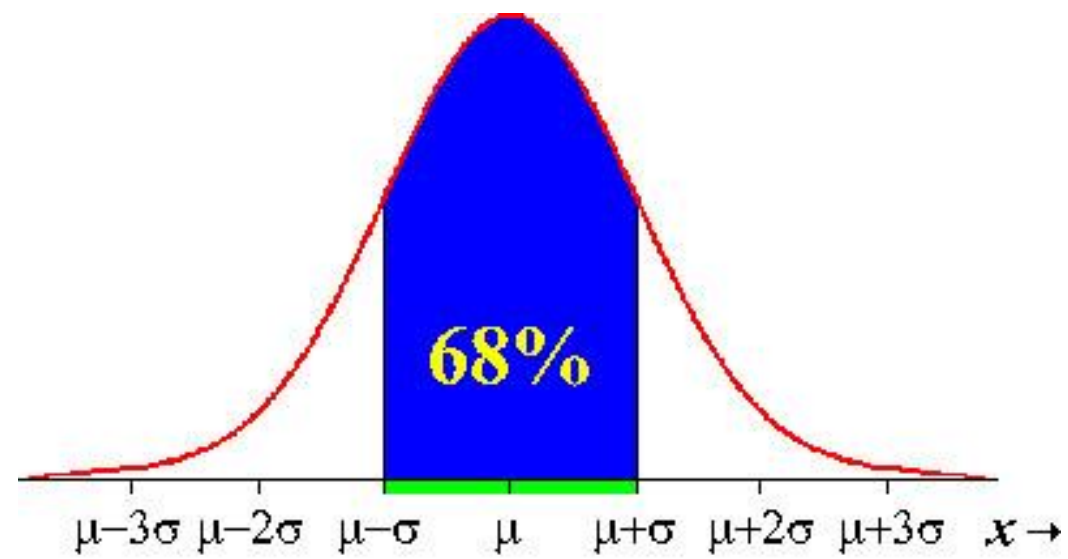
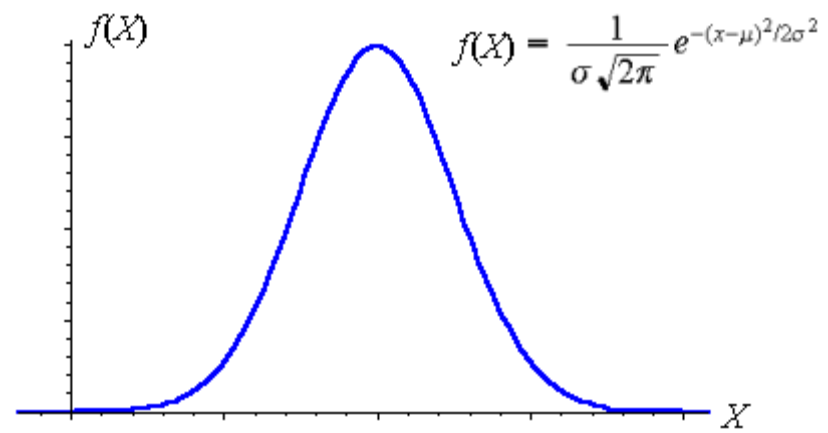
توزیع نرمال
کشیدگی برابر با صفر

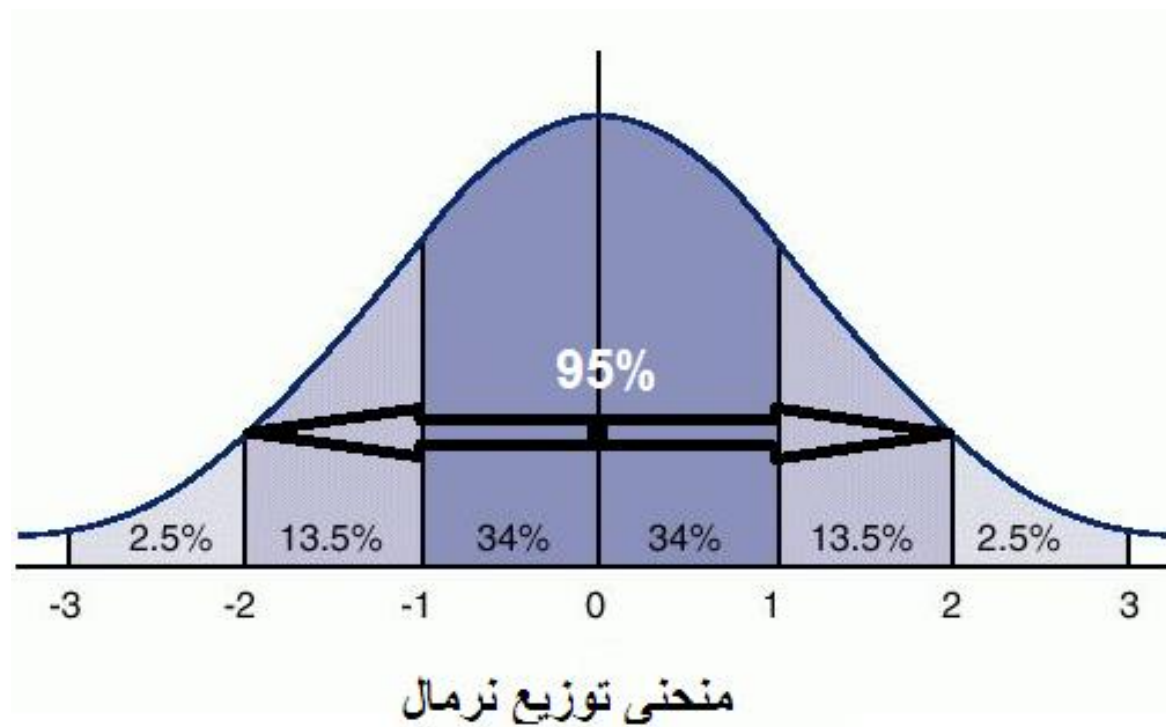
کشیدگی مثبت
کشیدگی بزرگ تر از صفر

درک ارتباط بین انحراف معیار با میزان احتمال:

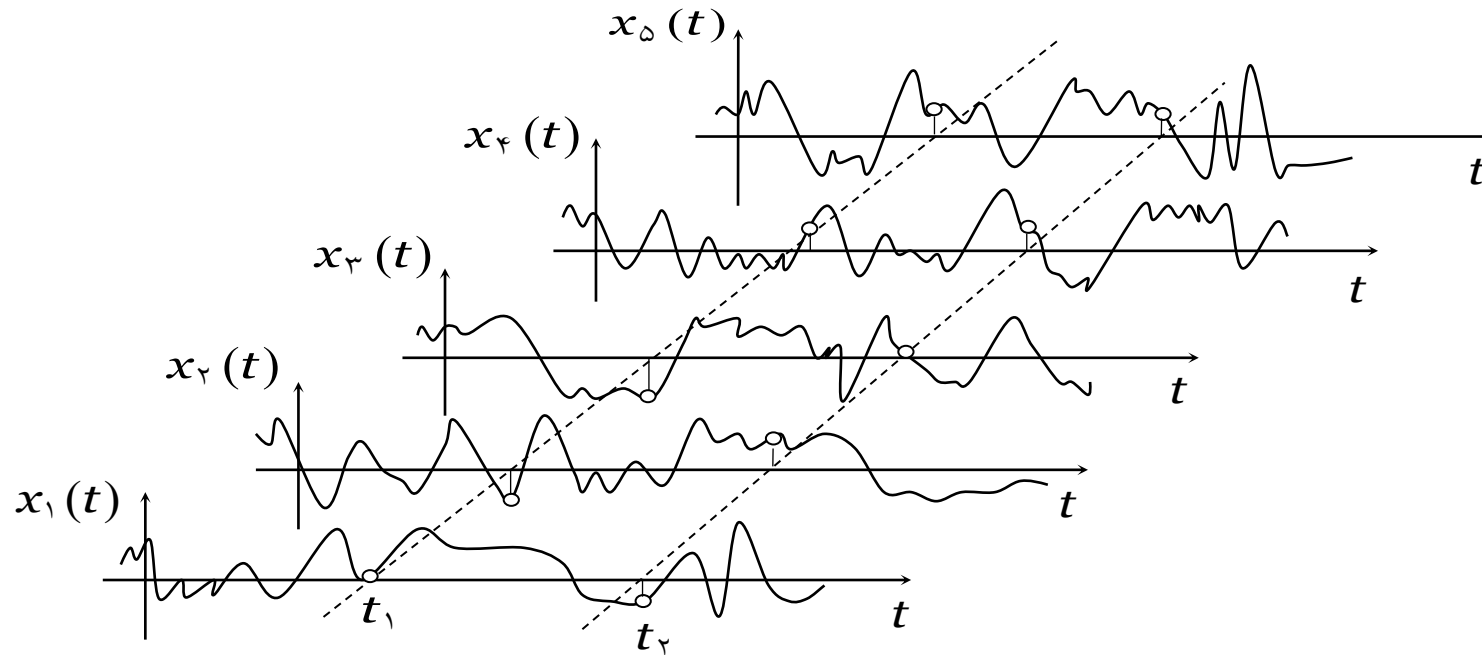








۵.۲ میانگین «چند رکورد» (Ensemble average)



شکل ۴.۲ مفهوم میانگین «چند رکورد»

این را میانگین تیپ ۳ یا میانگین چند رکورد می نامیم.

۱.۵.۲ فرآیند تصادفی مانا

اگر توزیع‌های احتمال حاصل از «چند رکورد» (ensemble) به زمان مطلق وابسته نباشند، فرآیند تصادفی را مانا (stationary) می‌گویند. مطمئناً جمله مانا به توزیع‌های احتمال بر می‌گردد و نه به خود نمونه‌ها. یعنی تمام میانگین‌ها (میانگین، میانگین مربعات، واریانس و انحراف معیار) از زمان مطلق، مستقل هستند. از آنجا که تمام فرآیندهای تصادفی مهندسی باید یک آغاز و یک پایان داشته باشند، آن‌ها در حقیقت نمیتوانند مانا باشند، ولی برای منظورهایی عملی همین که یک فرآیند برای بخش عمده‌ای از عمر مفید، مانا باشد، واقعا کافی است. ممکن است بتوان با تقسیم کل فرآیند به چند دوره مجزا، هریک را تقریباً جداگانه مانا فرض کرد. عبارت مانای ضعیف برخی مواقع برای توصیف فرآیندهایی که در آن‌ها توزیع‌های احتمال مرتبه اول و دوم، وابسته به زمان نیستند، به کار می‌رود. همچنین فرآیند مانای قوی فرآیندی است که برای آن تمام توزیع‌های احتمال در «چند رکورد» (ensemble) مستقل از زمان هستند.

۲.۵.۲ فرآیند تصادفی ارگودیک

ریشه لغت ارگودیک

کلمه ارگودیک از کلمه یونانی **ἔργον** and **ὁδός** مشتق شده است. زمانی که بولتزمن روی یک مسئله در زمینه مکانیزمهای آماری کار می کرد این کلمه را انتخاب کرد.

ἔργον • (érgon) *n* (genitive ἔργου); second declension

1. deed, doing, action

2. labour, work, task

ὁδός • (odós) *f* (plural οδοί)

1. street, road, way

در پردازش سیگنال، یک فرایند تصادفی ارگودیک فرایندی است که ویژگی هایی آماری آن (مانند واریانس و میانگین) را بتوان تنها از روی یک نمونه از آن فرآیند، که به مدت کافی برداشته شده باشد، تعیین کرد.

که می شود میانگین تیپ ۱

یعنی از روی یک و فقط یک رکورد، بتوان میانگین و واریانس و در حالت کلی تر، تابع چگالی احتمال را بدست آورد.

یعنی Ensemble نیاز نباشد که همان میانگین تپ ۳ است.

این میشود ارگودیک!

تعریف فرایند ارگودیک مبتنی بر یک رکورد:

می دانیم متوسط زمانی یک نمونه از یک فرایند تصادفی را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$\hat{m}_x(t)_T = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

این را میانگین تپ ۱ یا میانگین زمانی می نامیم.

و متوسط آماری فرایند به صورت زیر است:

$$m_x(t) = E[x(t)]$$

این را میانگین تپ ۲ یا میانگین زمانی می نامیم.

اکنون این فرایند، ارگودیک است اگر:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{m}_x(t)_T = m_x(t)$$

تعریف فرایند ارگودیک مبتنی بر چند رکورد:

اگر مربع میانگین (یا واریانس) برابر مربع میانگین نمونه (یا واریانس) باشد، فرایند ما را فرایند ارگودیک نامیده می‌شود.
یعنی:

$$\sigma_x^2 = \sigma_{x_i}^2 \quad i = 1 \dots N$$

که در آن N تعداد نمونه s ، i نمونه i ام و δ_x با رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_{x_i}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \bar{x}(t)]_i^2 dt$$

۱.۳ همبستگی

این معادله خط برازش y روی x است. به طور مشابه می توان خط برازش x روی y را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\frac{x}{\sigma_x} = \left\{ \frac{E[xy]}{\sigma_x \sigma_y} \right\} \frac{y}{\sigma_y} \quad (۵.۳)$$

اگر میانگین x و y صفر نباشد، می توان نوشت:

$$\frac{y - m_y}{\sigma_y} = \left\{ \frac{E[(x - m_x)(y - m_y)]}{\sigma_x \sigma_y} \right\} \frac{x - m_x}{\sigma_x} \quad (۶.۳)$$

و:

$$\frac{x - m_x}{\sigma_x} = \left\{ \frac{E[(x - m_x)(y - m_y)]}{\sigma_x \sigma_y} \right\} \frac{y - m_y}{\sigma_y} \quad (۷.۳)$$

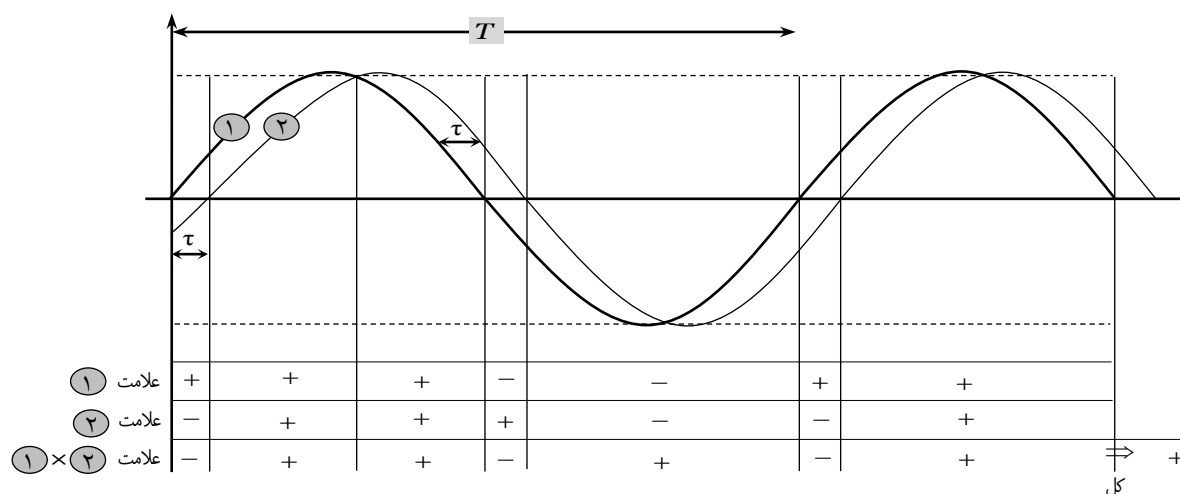
که m_x و m_y به ترتیب میانگین های x و y هستند. پارامتر:

$$\rho_{xy} = \frac{E[(x - m_x)(y - m_y)]}{\sigma_x \sigma_y} \quad (۸.۳)$$

۲.۳ خودهم‌بستگی

سه حالت برای فاصله (شیفت) یک تابع با خودش را می‌توان متصور شد:

- فاصله کم (τ کوچک)
- فاصله متوسط (τ متوسط)
- فاصله زیاد (τ بزرگ)

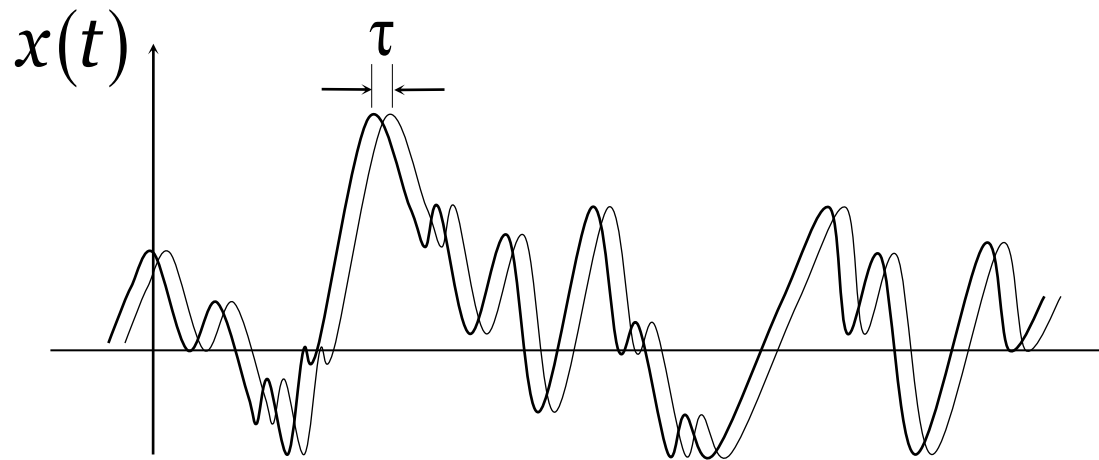


حالت فاصله کم (τ کوچک)

که $R_x(\tau)$ تابع خودهمبستگی $x(t)$ است. اگر $x(t)$ مانا باشد، میانگین و انحراف معیار مستقل از زمان t خواهند بود:

$$E[x(t)] = E[x(t + \tau)] = m$$

$$\sigma_{x(t)} = \sigma_{x(t+\tau)} = \sigma$$



ضریب همبستگی بین $x(t)$ و $x(t + \tau)$ مطابق معادله ۸.۳ تعریف می‌شود که به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{E[\{x(t) - m\}\{x(t + \tau) - m\}]}{\sigma^2} \\ &= \frac{E[x(t)x(t + \tau)] - mE[x(t)] - mE[x(t + \tau)] + m^2}{\sigma^2} \quad (۱۴.۳) \\ &= \frac{R_x(\tau) - m^2}{\sigma^2}\end{aligned}$$

بنابراین $R_x(\tau) = \sigma^2 \rho + m^2$ است. از آن جا که مقادیر حدی ρ مساوی ± ۱ است، بنابراین:

$$-\sigma^2 + m^2 \leq R_x(\tau) \leq \sigma^2 + m^2 \quad (۱۵.۳)$$

در نتیجه مقدار تابع خودهمبستگی هرگز از میانگین مربعات $E[x^2] = \sigma^2 + m^2$ بیشتر نخواهد شد و هرگز از $-\sigma^2 + m^2$ کمتر نخواهد شد (یعنی کران دار Bounded است).

هنگامی که بازه زمانی τ مساوی صفر باشد می توان نوشت:

$$R_x(\tau = 0) = E[x(t)^2] = E[x^2] \quad (۱۶.۳)$$

و بنابراین مساوی مقدار میانگین مربعات فرآیند خواهد بود. که همان واریانس است.

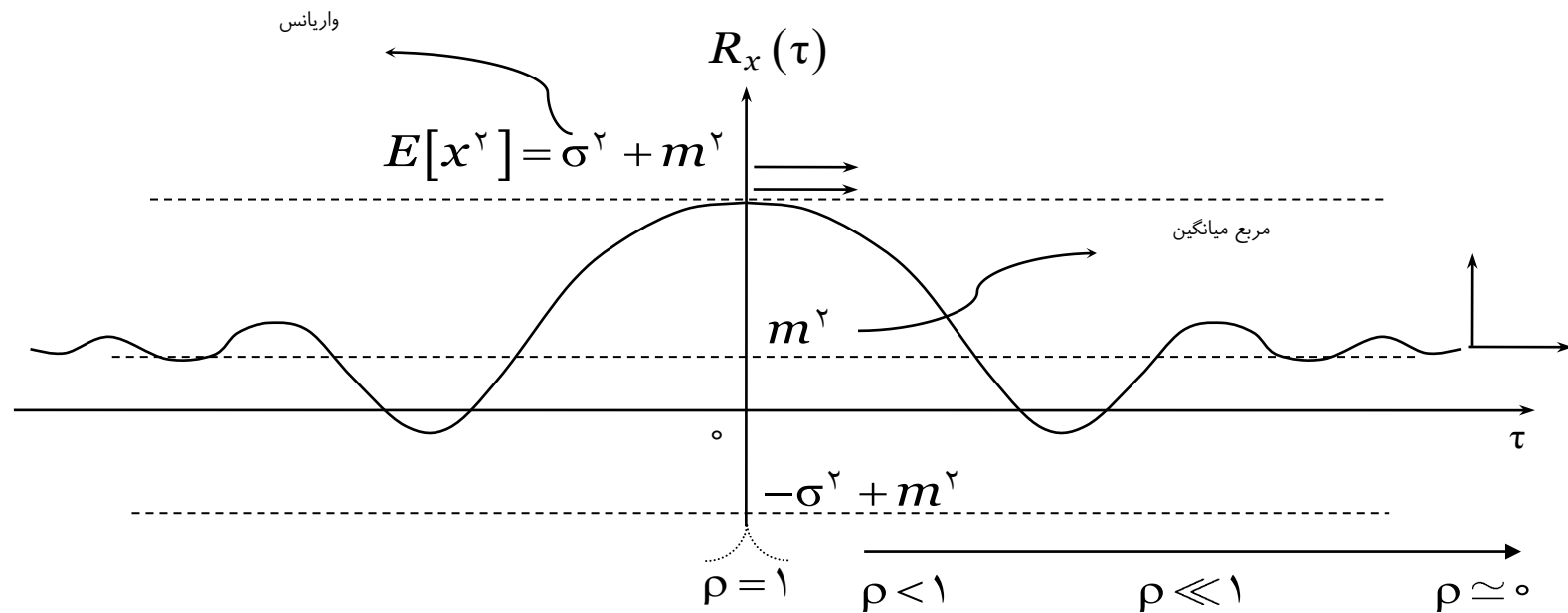
در بازه های زمانی بسیار بزرگ ($\tau \rightarrow \infty$) فرآیند تصادفی، غیرهمبسته خواهد بود و هیچ ارتباطی بین دو مقدار $x(t)$ و $x(t + \tau)$ وجود نخواهد داشت و بنابراین ضریب همبستگی $\rho \rightarrow 0$ خواهد بود. در این مورد با توجه به معادله ۱۴.۳ می توان نوشت:

$$R_x(\tau \rightarrow \infty) \rightarrow m^2 \quad (۱۷.۳)$$

همچنین برای یک فرآیند مانا، $R_x(\tau)$ فقط به τ بستگی دارد و هیچ ارتباطی با زمان مطلق t ندارد:

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = E[x(t)x(t-\tau)] = R_x(-\tau) \quad (۱۸.۳)$$

بنابراین $R_x(\tau)$ یک تابع زوج از τ است.



شکل ۷.۳

نمایش خواص تابع خودهمبستگی $R_x(\tau)$ فرآیند تصادفی مانای $x(t)$

تمرین: با توجه به شکل ۷.۳ تابع $\rho = \frac{R_x(\tau) - m^2}{\sigma^2}$ را رسم و تفسیر نمایید. در حالت حدی بحث کنید.

نکته: واریانس را می‌توان را با دو رویکرد تفسیر کرد:

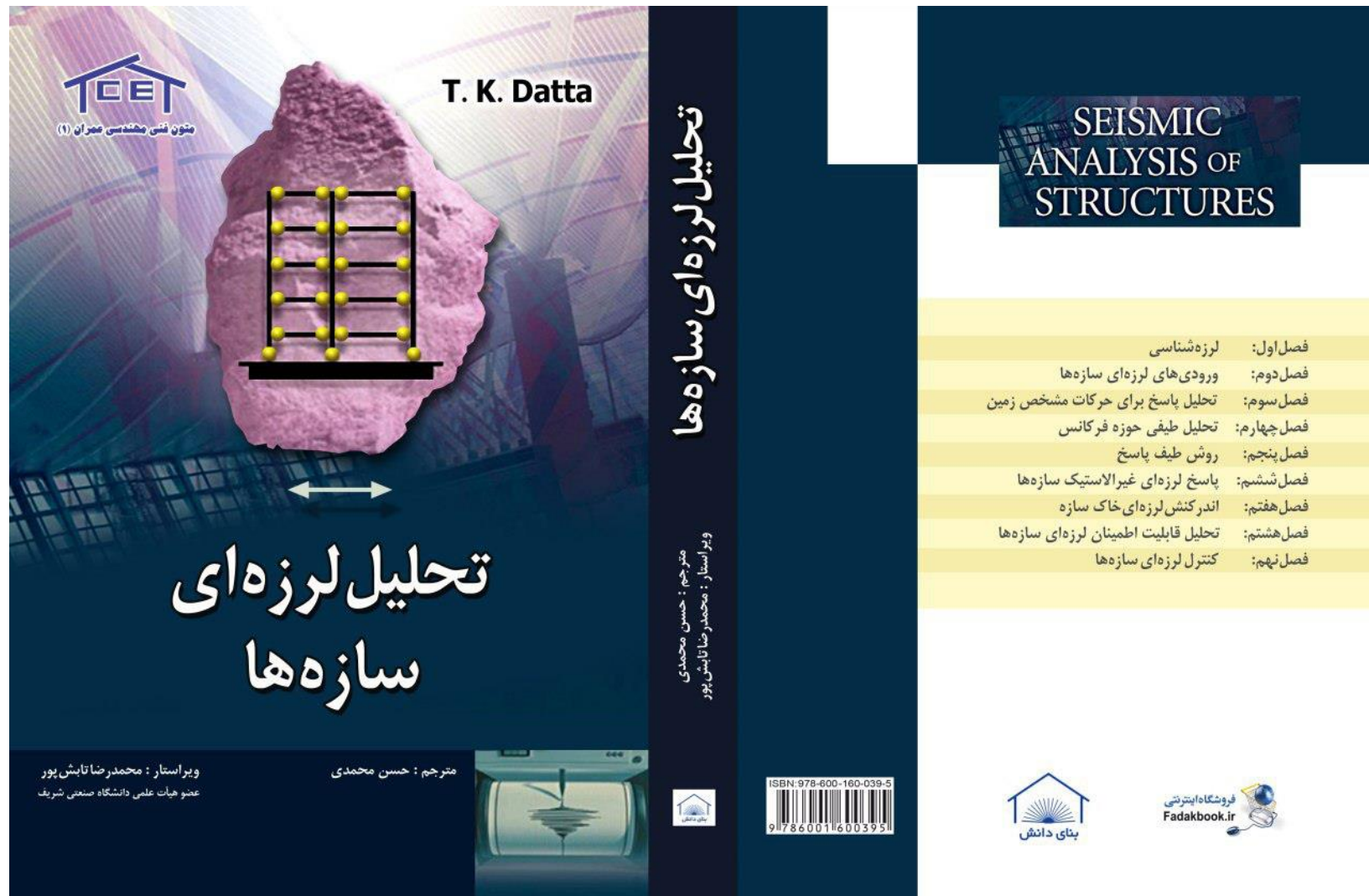
- آماری: پراکندگی حول میانگین را نشان می‌دهد و خودش نیز میانگین مربعات است.
- فیزیکی: انرژی را نشان می‌دهد.

تقارن و هم‌زمانی این دو بسیار مهم است.

ضمناً توجه شود که تابع خودهم‌بستگی علاوه بر آن که خواص فرکانسی فرآیند را به ارث می‌برد، شامل اطلاعات مفیدی در خصوص مقادیر واریانس و میانگین نیز می‌باشد و تمام شرایط فوریه‌پذیری را دارد.

نکته: در شکل ۷.۳ توجه شود که در مقدار $\tau = 0$ هم‌بستگی تابع بدون هیچ اختلاف فازی با خودش بررسی می‌شود و در نتیجه $\rho = 1$ خواهد بود و تابع خودهم‌بستگی مقدار بیشینه مساوی $\sigma^2 + m^2$ خواهد داشت. ضمناً با زیاد شدن τ ، مقدار ρ قطعا کوچکتر از ۱ خواهد شد.

تحلیل فوریه (فصل چهارم کتاب زیر)



الگوریتم‌های فوریه سریع (FFT و $IFFT$) براساس DFT هستند. در FFT ، $x(t)$ در بازه‌ی زمانی Δt نمونه‌گیری می‌شود و مقادیر مجزای $x(t)$ یعنی x_r ، ورودی هستند. تعداد مقادیر باید ترجیحاً $N = 2^n$ باشد که در آن n یک عدد صحیح است. FFT معادله (۱۲.۴) را حل می‌کند و 2^n عدد مختلط به‌دست می‌آید. اگر این اعداد مختلط ورودی $IFFT$ باشند، $x(t)$ به صورت 2^n مقدار گسسته است که در Δt و با حل معادله (۱۳.۴) نمونه‌گیری می‌شود. از $(N = 2^n)$ عدد مختلط، مجموعه‌ی آخر $N/2$ عدد، اعداد مختلط مزدوج مختلط مجموعه‌ی اول هستند. برای جزئیات بیشتر در مورد $IFFT$ و FFT ، می‌توان به کتاب‌های استاندارد موجود در این رابطه مراجعه کرد. بعداز تعیین x_k از FFT ، دامنه‌های فوریه را می‌توان از رابطه‌ی زیر به‌دست آورد:

$$A_k = 2\sqrt{(c_k^2 + d_k^2)} \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (14.4)$$

که در آن است $X_K = C_k + id_k$ ، و

$$A_0 = c_0. \quad (15.4)$$

توجه کنید که در FFT ، نیازی نیست که A_0 براساس فرض گسترش تجربی انتگرال فوریه از یک سری فوریه، صفر فرض شود. در بعضی از انواع FFT ، x_r بر N تقسیم می‌شود، یعنی معادلات (۱۲.۴) و (۱۳.۴) استفاده می‌شوند.

در این حالت، معادلات (۱۴.۴) و (۱۵.۴) اعتبار دارند. در انواع دیگر FFT مثلاً در $MATLAB$ ، x_r بر $N/۲$ تقسیم می‌شود. در این حالت:

$$A_k = \sqrt{(c_k^2 + d_k^2)} \quad (۱۶.۴)$$

$$A_0 = \frac{c_0}{۲} \quad (۱۷.۴)$$

طبق تئوری پارسوال (Parsavel's theorem)، مربع میانگین $x(t)$ طبق معادله‌ی (۱.۴) به صورت زیر است:

$$\frac{۱}{T} \int_0^T x(t)^2 dt = \frac{a_0^2}{۴} + \frac{۱}{۲} \sum (a_k^2 + b_k^2) \quad (۱۸.۴)$$

اگر $x(t)$ با استفاده از DFT بسط داده شود:

$$\frac{۱}{T} \int_0^T x(t)^2 dt = \frac{۱}{N} \sum_{r=0}^{N-۱} x_r^2 = \sum_{k=0}^{N-۱} |x_k|^2 \quad (۱۹.۴)$$

۱.۵ تعریف چگالی طیفی

از آن جا که نمونه تابعی از تاریخچه زمانی $x(t)$ پریودیک نیست، نمی توان آن را با استفاده از سری فوریه گسسته (مجزا) بیان کرد. هم چنین برای فرآیند مانای $x(t)$ شرط زیر برقرار نیست:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

بنابراین تئوری کلاسیک تحلیل فوریه برای این نمونه تابع قابل استفاده نیست. این مشکل را می توان با تحلیل فوریه تابع خودهم بستگی $R_x(\tau)$ به جای $x(t)$ رفع کرد. (به خواص تابع خودهم بستگی مراجعه شود).

منطق پشت این رویکرد این است که تابع خودهم بستگی به طور غیرمستقیم اطلاعات مهمی درباره فرکانس ها از فرآیند تصادفی ارائه می دهد. دیدیم که اگر $x(t)$ و $x(t+\tau)$ هم فاز باشند، $R_x(\tau)$ دارای مقدار بیشینه و اگر در فاز مقابل باشند، آن گاه تابع خودهم بستگی، کمینه خواهد بود. بنابراین فرکانس های ارائه شده در $R_x(\tau)$ بر حسب τ نشان دهنده ی محتوای فرکانسی نمونه تابع فرآیند تصادفی $x(t)$ است. اگر فرآیند تصادفی $x(t)$ طوری تنظیم شود که میانگین آن صفر باشد ($m = E[x] = 0$) آن گاه به شرطی که $x(t)$ دارای مؤلفه های پریودیک نباشد، خواهیم داشت:

$$R_x(\tau \rightarrow \infty) = 0$$

و در نتیجه شرط:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau < \infty$$

برآورده خواهد شد. اکنون می‌توان از روش تبدیل فوریه استفاده کرد و تبدیل فوریه $R_x(\tau)$ را به دست آورد. تبدیل فوریه و معکوس آن برای $R_x(\tau)$ به صورت زیر است:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (۱.۵)$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (۲.۵)$$

که $S_x(\omega)$ چگالی طیفی فرآیند $x(t)$ نامیده می‌شود و تابعی از فرکانس زاویه‌ای ω است. می‌دانیم توابعی که بر حسب فرکانس باشند، طیف نامیده می‌شوند. مهم‌ترین خاصیت $S_x(\omega)$ هنگامی آشکار می‌شود که در معادله (۲.۵) $\tau = 0$ باشد. در این حالت داریم:

$$R_x(\tau=0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega$$

با توجه به خواص $R_x(\tau)$ می‌توان نوشت:

$$R_x(\tau=0) = E[x(t)x(t+0)] = E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = x_{rms}^2 \quad (۳.۵)$$

بسیار مهم:

یعنی میانگین مربع x یا همان x_{rms}^2 مساوی سطح زیر چگالی طیفی است (شکل ۱.۵). واحد $S_x(\omega)$ به صورت واحد $E[x^2]$ تقسیم بر واحد فرکانس است.

یک پارامتر اساسی در رویکرد آماری به تحریک و پاسخ، جذر میانگین مربعات (RMS) می باشد که همان جذر $E[x^2]$ است:

$$RMS = \sqrt{E[x^2]}$$

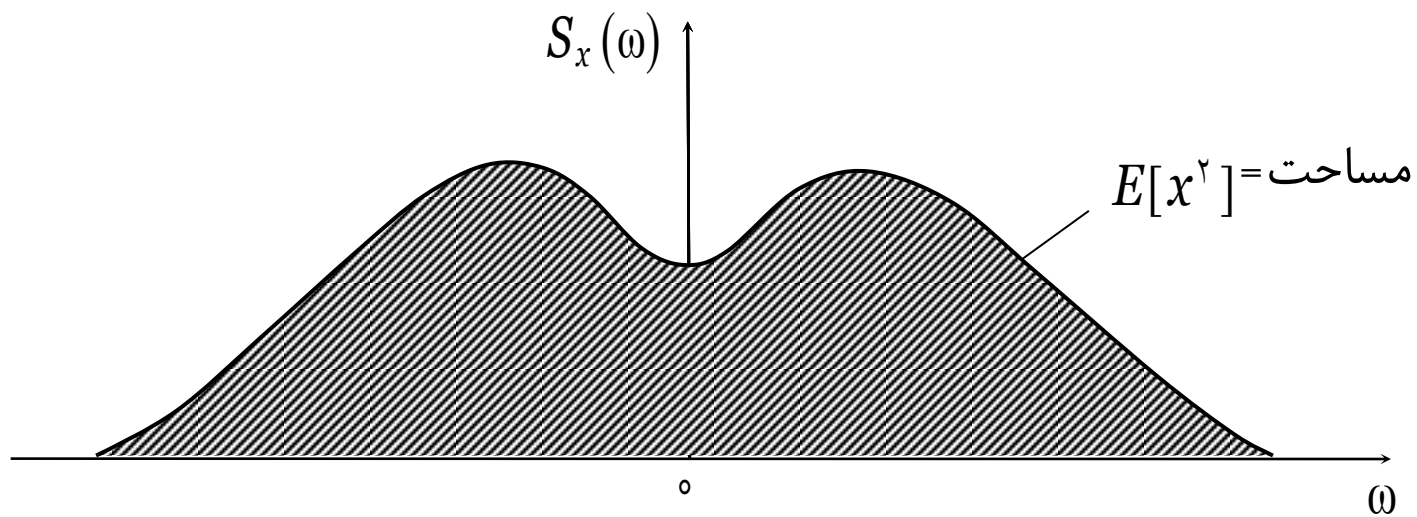
مربعات میانگین جذر

که همان انحراف معیار است.

یکی از کاربردهای مهم RMS تعیین پاسخ بیشینه می باشد.

$$x_{\max} \simeq \alpha \sqrt{E[x^2]} = \alpha \times RMS$$

که α به تعداد قله ها بستگی دارد.



شکل ۱.۵ میانگین مربع x مساوی سطح زیر چگالی طیفی است.

نکته مهم:

طیف دو طرفه مثل بالا

طیف یک طرفه: به جای این شکل، یک طرف را دوبرابر کنیم.

طیف نصف این مقدار (اگر این مقدار باشد ارتفاع موج، طیف نصفش میشود طیف دامنه)

توجه شود که x^2 در مباحث مکانیک معمولاً متناظر با انرژی است. این تابع، زوج و حقیقی است، زیرا $\cos \omega \tau$ تابعی زوج است. همچنین از آنجا که $S_x(\omega)$ مساوی میانگین مربعات است، هرگز منفی نخواهد بود. پس خواص چگالی طیفی فرآیند تصادفی مانای $x(t)$ به صورت زیر است:

- حقیقی
- زوج
- غیرمنفی

مثال: فصل ۱۲ کتاب ارتعاشات تصادفی

$$R_x(\tau=0) = E[x(t)x(t+0)] = E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = x_{rms}^2 \quad (3.5)$$

$$x_{rms}^2 = area \Rightarrow x_{rms} = \sqrt{area}$$

بزودی اثبات می کنیم:

$$H_s = \sqrt{2} H_{rms} = \sqrt{2} \sqrt{area}$$

توجه شود که طیف موج ممکن است به یکی از سه صورت زیر باشد:

- طیف دامنه،
- طیف ارتفاع منفرد یا طیف
- ارتفاع دوبل

موج مشخصه و سطح زیر منحنی طیف موج برحسب اینکه طیف موج کدام از موارد بالا باشد، به صورت زیر است:

$$H_s = 2/\sqrt{2} \sqrt{area} = \sqrt{2} \sqrt{area} \times 2 \quad \text{طیف دامنه (منفرد):}$$

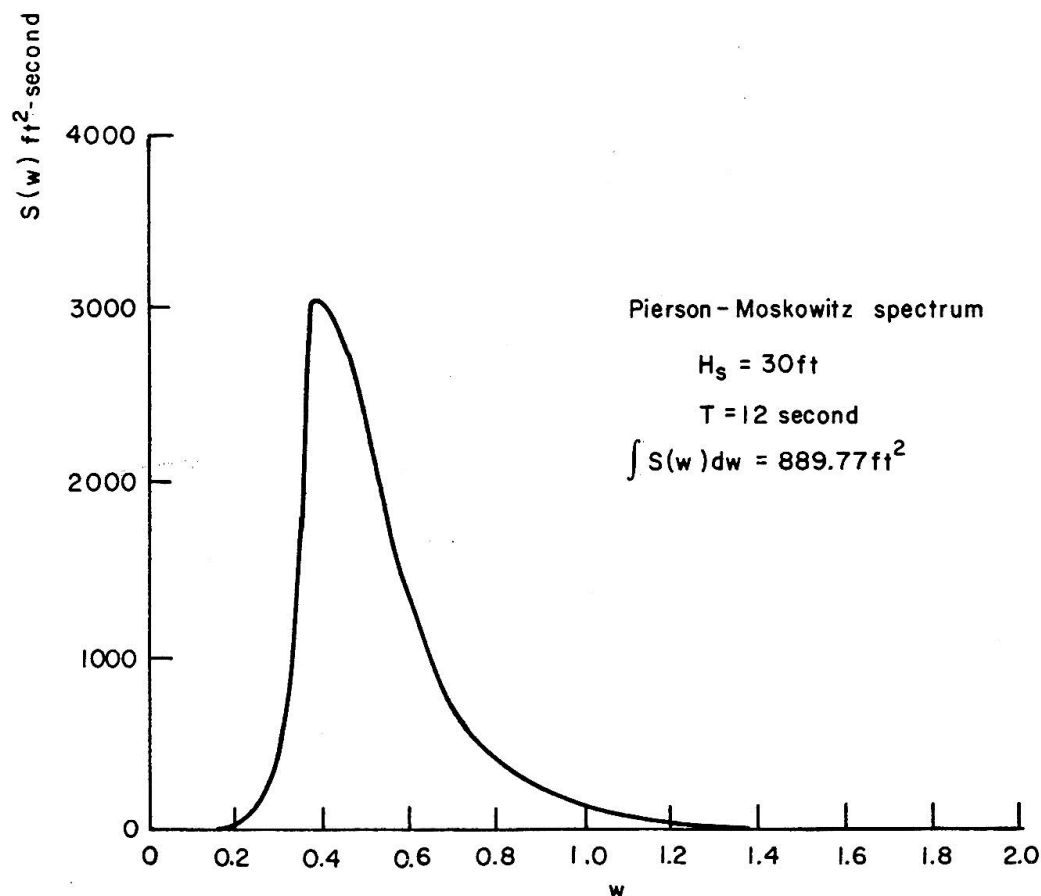
$$H_s = 1/4 \sqrt{area} = \sqrt{2} \sqrt{area}$$

$$H_s = \sqrt{area}$$

طیف ارتفاع منفرد:

طیف ارتفاع دابل:

مثال ۲.۱۲



طیف ورودی

جدول ۲.۱۲ مقادیر طیف پیرسون-مسکوویچ

ω	ω^{-5}	ω^{-4}	$0.0377\omega^{-4}$	$e^{-0.377\omega^{-4}}$	$S(\omega)$	$S(\omega)d\omega$
0.1	100000	10000	377	0	0	
0.2	3125	625	23.56	0	0	0
0.3	411.52	123.46	4.65	0.01	533.3	26.67
0.4	97.66	39.06	1.47	0.23	3032.3	178.28
0.5	32.0	16.0	0.60	0.55	2376.0	270.42
0.6	12.86	7.72	0.29	0.75	1298.6	183.73
0.7	5.95	4.16	0.16	0.85	684.4	99.15
0.8	3.05	2.44	0.09	0.91	375.5	52.99
0.9	1.69	1.52	0.06	0.95	215.6	29.56
1.0	1.0	1.0	0.04	0.96	130.0	17.28
1.1	0.62	0.68	0.03	0.97	81.61	10.58
1.2	0.40	0.48	0.02	0.98	53.03	6.73
1.3	0.27	0.35	0.013	0.98	35.98	4.45
1.4	0.186	0.26	0.010	0.99	24.86	3.04
1.6	0.095	0.153	0.006	0.99	12.81	3.77
1.8	0.053	0.095	0.004	0.996	7.12	1.99
2.0	0.031	0.063	0.003	0.998	4.20	1.13
					$\int S(\omega)d\omega = 889.77$	

$$H_s = \sqrt{1119/111} = 29.83 \text{ ft}$$

۳.۵ چگالی طیفی برای مشتق‌های یک فرآیند

۳.۷ تعیین چگالی طیفی پاسخ

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) \quad (۸.۷)$$

معادله بالا مهم‌ترین نتیجه در ارتعاشات تصادفی است. تمام تأکیدی که در استفاده از تبدیل فوریه وجود داشت برای رسیدن به این نتیجه بود. در خوانش معادله‌ی ۸.۷ توجه شود که $S_y(\omega)$ چگالی طیفی پاسخ، $|H(\omega)|^2$ چگالی طیفی سیستم (بدون بعد) و $S_x(\omega)$ چگالی طیفی تحریک می‌باشد. در مهندسی دریا به جای تابع پاسخ فرکانسی $H(\omega)$ از عملگر دامنه‌ی پاسخ (RAO) استفاده می‌شود. RAO مربوط به یک درجه آزادی عبارت است از پاسخ در آن درجه‌ی آزادی تحت نیروی حاصل از موج با ارتفاع واحد. به این صورت می‌توان نوشت:

$$S_y(\omega) = |RAO|^2 S_x(\omega)$$

۴.۷ میانگین مربعات پاسخ

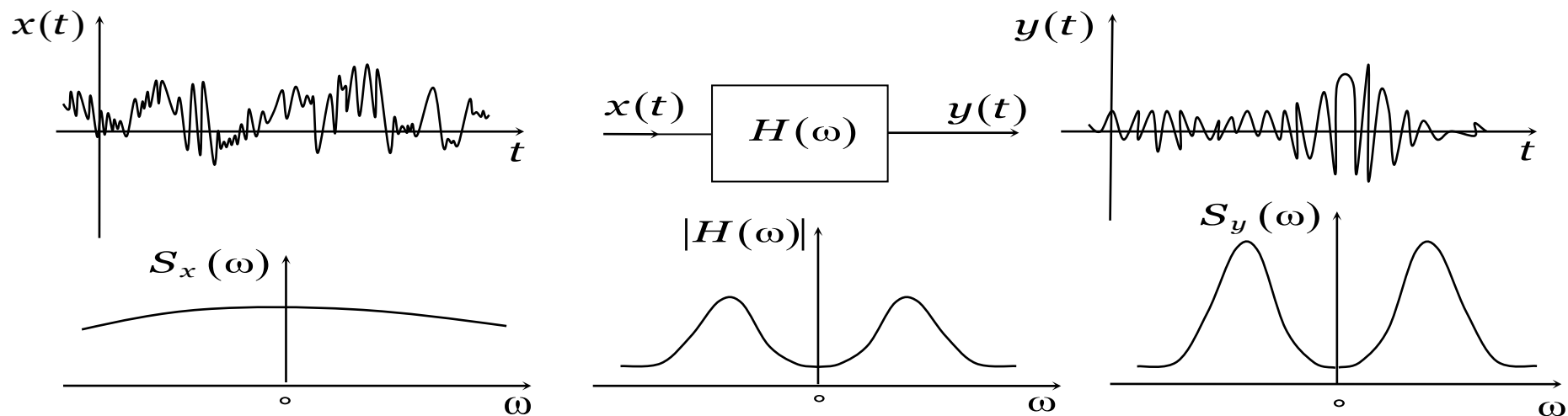
هنگامی که چگالی طیفی پاسخ تعیین شد، می توان مستقیماً با استفاده از معادله زیر، میانگین مربعات پاسخ را محاسبه کرد:

$$E[y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_y d\omega$$

یا:

$$E[y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega$$

معادله بالا کاربردهای مهندسی زیادی دارد.

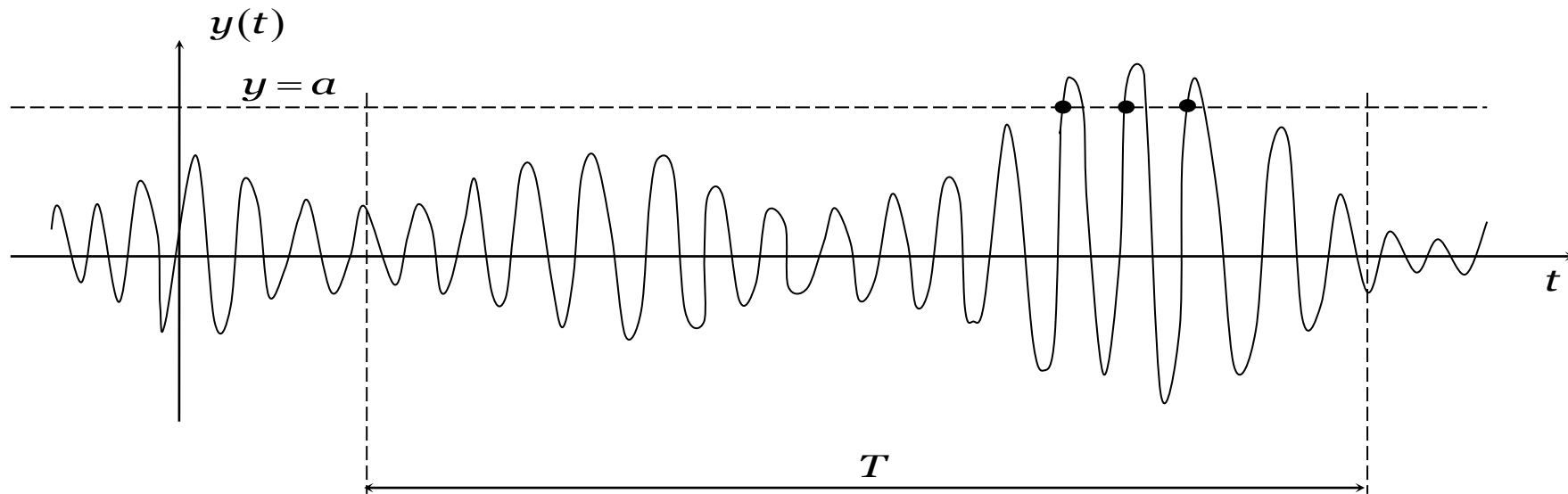


شکل ۱.۸ پاسخ باندباریک یک سیستم تحت یک اغتشاش باندپهن

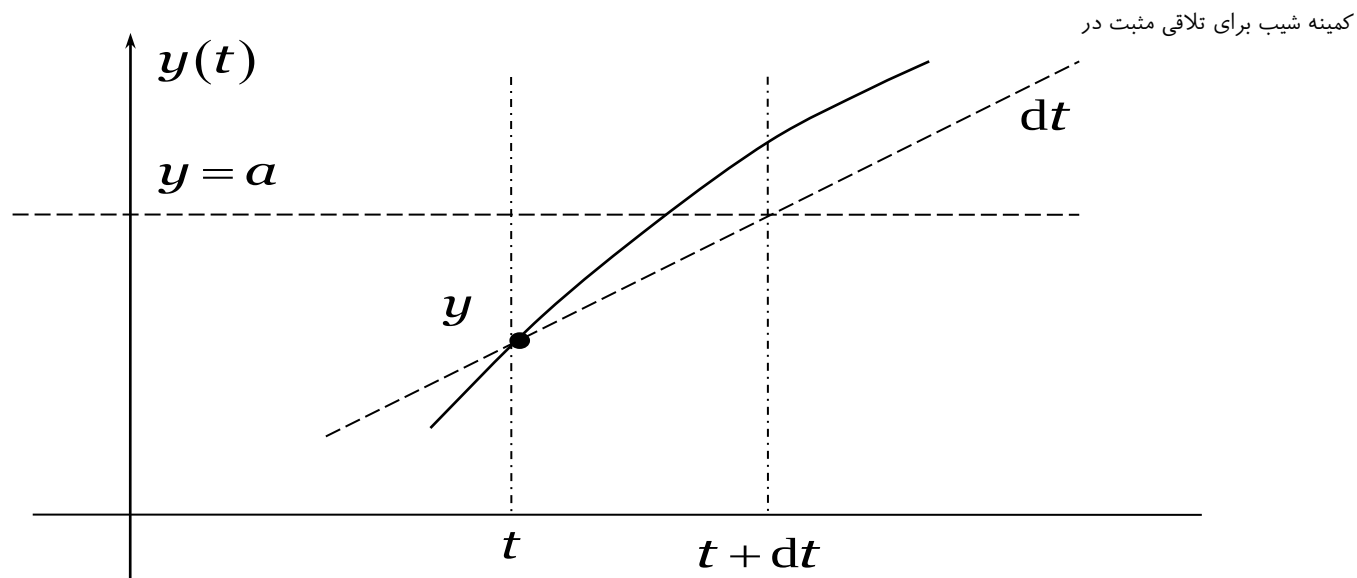
مهم:

اگر یک فرایند، نرمال باشد، توزیع بیشینه های آن راییلی است.

۲.۸ تحلیل تلاقی خط افقی با تاریخچه‌ی پاسخ



شکل ۳.۸ نمونه‌ای از فرآیند تصادفی باندباریک



شکل ۴.۸ شرایط مربوط به تلاقی شیب مثبت با $y = a$ در بازه زمانی dt

که $p(a, \dot{y})$ میانگین چگالی احتمال مشترک $p(y, \dot{y})$ در $y = a$ است.

$$v_a^+ dt = dt \int_0^\infty p(a, \dot{y}) \dot{y} d\dot{y}$$

از طرفین معادله بالا dt حذف می‌شود و معادله زیر به دست می‌آید:

$$v_a^+ = \int_0^\infty p(a, \dot{y}) \dot{y} d\dot{y} \quad (20.8)$$

در حالت خاصی که توزیع احتمال به صورت گوسی باشد با توجه به معادله (۱۰.۸) می‌توان نوشت:

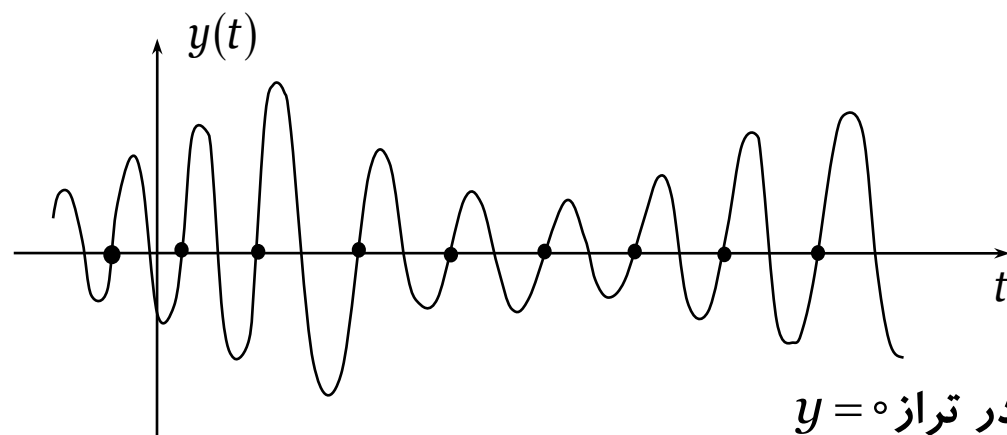
$$p(a, \dot{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{a^2}{2\sigma_y^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{y}}} e^{-\frac{\dot{y}^2}{2\sigma_{\dot{y}}^2}}$$

که با قرار دادن آن در معادله (۲۰.۸) خواهیم داشت:

$$v_a^+ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{a^2}{2\sigma_y^2}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{y}}} e^{-\frac{\dot{y}^2}{2\sigma_{\dot{y}}^2}} \dot{y} d\dot{y}$$

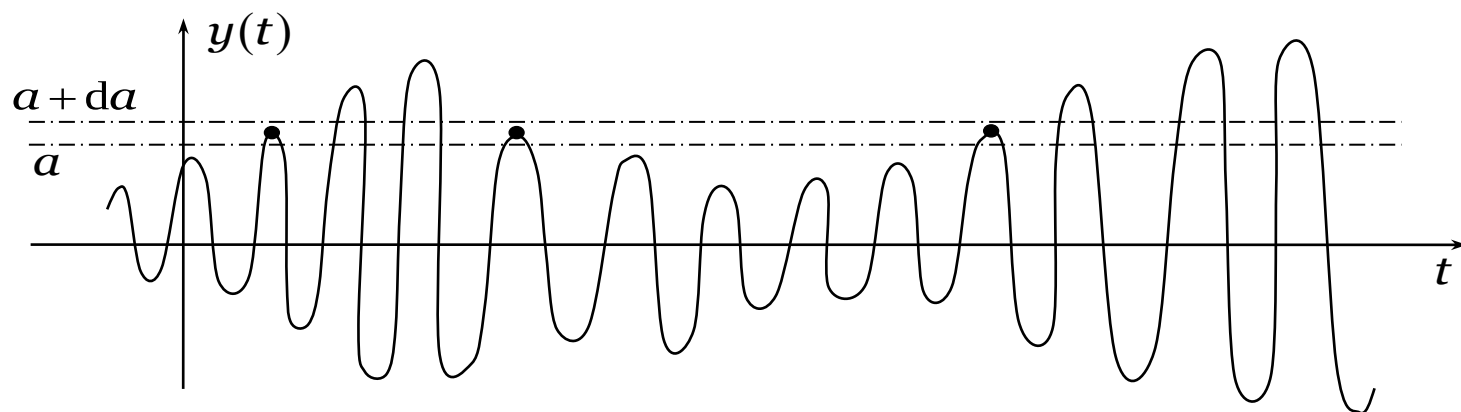
با توجه به معادله (۲۰.۱) می‌توان مقدار انتگرال بالا را محاسبه کرد که مساوی $\frac{\sigma_{\dot{y}}}{\sqrt{2\pi}}$ است بنابراین خواهیم داشت:

$$v_a^+ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma_{\dot{y}}}{\sigma_y} e^{-\frac{a^2}{2\sigma_y^2}} \quad (21.8)$$



شکل ۶.۸ تلاقی شیب مثبت در تراز $y = 0$

۳.۸ توزیع پیک‌ها (قله‌ها)



شکل ۷.۸ تعیین قله‌های موجود بین $y = a$ تا $y = a + da$

(۲۲.۸)

$$\text{Prob} \quad \text{مقدار قله از } y=a \text{ بیشتر شود.} = \int_{\frac{v_a}{v_o^+}}^{\infty} p_p \, a \, da$$

و این مقدار احتمال آن است که مقدار قله از $y = a$ بیشتر شوند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\int_a^{\infty} p_p(a) da = \frac{v_a^+}{v_o^+} \quad (۲۳.۸)$$

با مشتق‌گیری از این معادله، تابع چگالی احتمال به دست می‌آید:

$$-p_p(a) = \frac{1}{v_o^+} \frac{d}{da} (v_a^+) \quad (۲۴.۸)$$

$$-p_p(a) = \frac{d}{da} \left(e^{\frac{-a^2}{2\sigma_y^2}} \right) = -\frac{a}{\sigma_y^2} e^{\frac{-a^2}{2\sigma_y^2}}$$

یا:

$$p_p(a) = \frac{a}{\sigma_y^2} e^{\frac{-a^2}{2\sigma_y^2}} \quad 0 \leq a \leq \infty \quad (۲۵.۸)$$

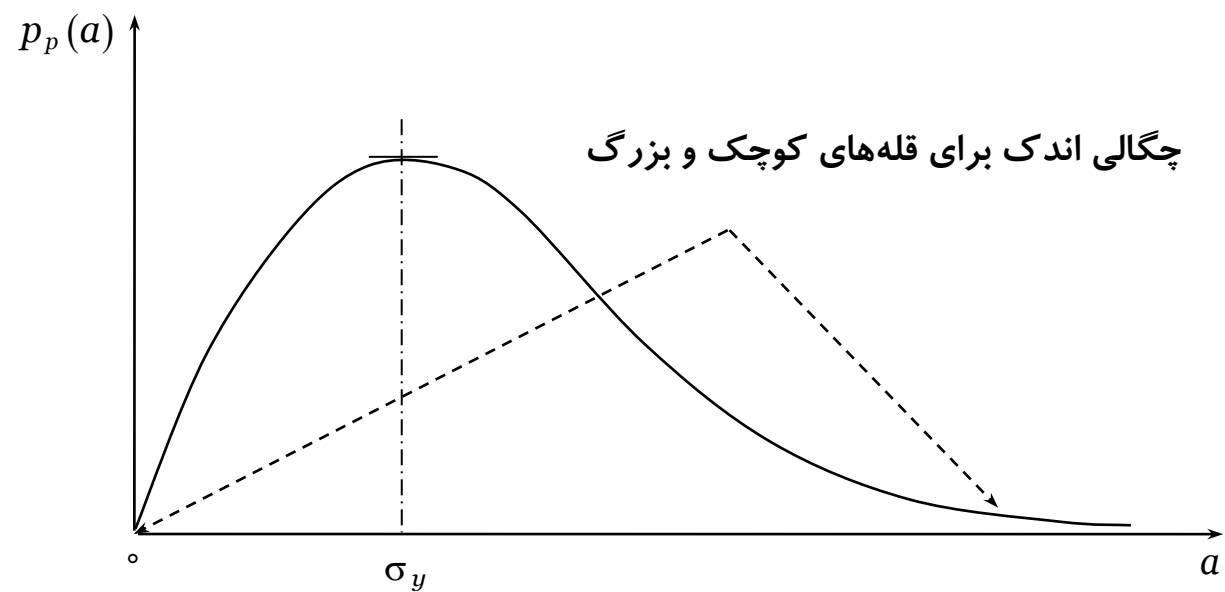
که همان توزیع معروف رایی مطابق شکل ۸.۸ است. تابع $p_p(a)$ دارای مقدار بیشینه $a = \sigma_y$ است.

$$\text{معرضه: } \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H_i^2 = \bar{H}^2$$

: میانگین مربعات ارتفاع موج

σ_y انحراف معیار فرآیند y است در شکل ۸.۸ نیز مشخص است که بخش عمده قله‌ها در همین حدود است. احتمال آن که a خیلی کوچک یا خیلی بزرگ باشد، کم است. و احتمال آن که مقدار قله از a بیشتر باشد با استفاده از معادله (۲۳.۸) به صورت زیر است:

$$\text{Prob} \quad \text{مقدار قله از } y=a \text{ بیشتر شود.} = e^{\frac{-a^2}{2\sigma_y^2}} \quad (26.8)$$



شکل ۸.۸ توزیع رایلی برای قله‌ها از فرآیند گوسی باندباریک

یکی از کاربردهای این نکته:

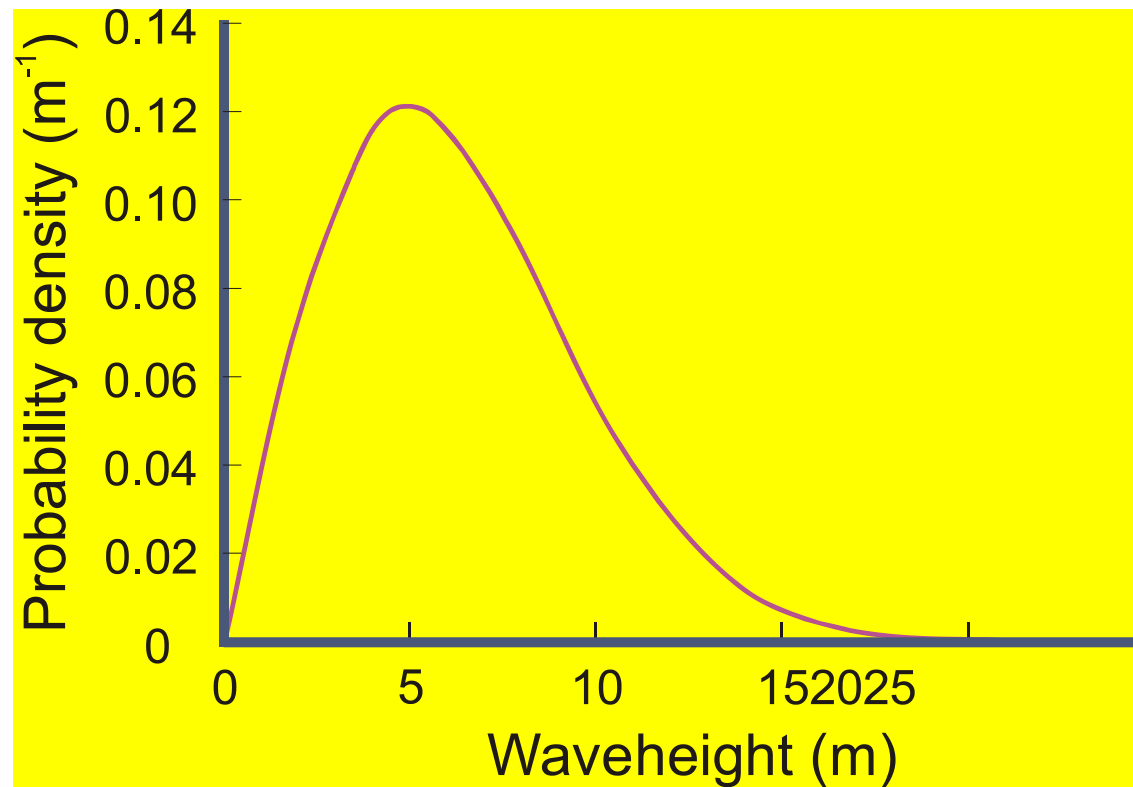
توزیع رایلی برای مقادیر حدی

توزیع رایلی برای ارتفاع موج به صورت زیر است:

$$f(h) = \frac{4h}{H_s^2} \exp\left(-\frac{4h^2}{H_s^2}\right) \equiv ahe^{-bh^2}, \quad b = 0.5a$$

توجه شود که سطح زیر این منحنی مساوی واحد است.

شکل زیر نشان دهنده تابع چگالی احتمال برای $H_s = 10m$ می باشد.



شکل ۳.۶ توزیع رایلی برای حالت $H_s = 10m$

می دانیم تابع توزیع تجمعی بصورت زیر است:

$$F_h(h) = 1 - \exp\left(-\frac{h^2}{H_s^2}\right)$$

$$1 - \frac{1}{n} = F_h(h) = 1 - \exp\left(-\frac{h^2}{H_s^2}\right)$$

یا:

$$h = H_s \sqrt{\frac{\ln n}{2}}$$

برای مثال فرض کنید در یک قطار موج ۱۰۰۰ موج داریم ($n = ۱۰۰۰$) و $H_s = ۱۰m$ است. بزرگترین موج بین این هزار موج مساوی است با:

$$h = H_s \sqrt{\frac{\ln n}{2}} = ۱۰ \sqrt{\frac{\ln ۱۰۰۰}{2}} = ۱۰ \times ۱٫۸۶ = ۱۸٫۶m$$



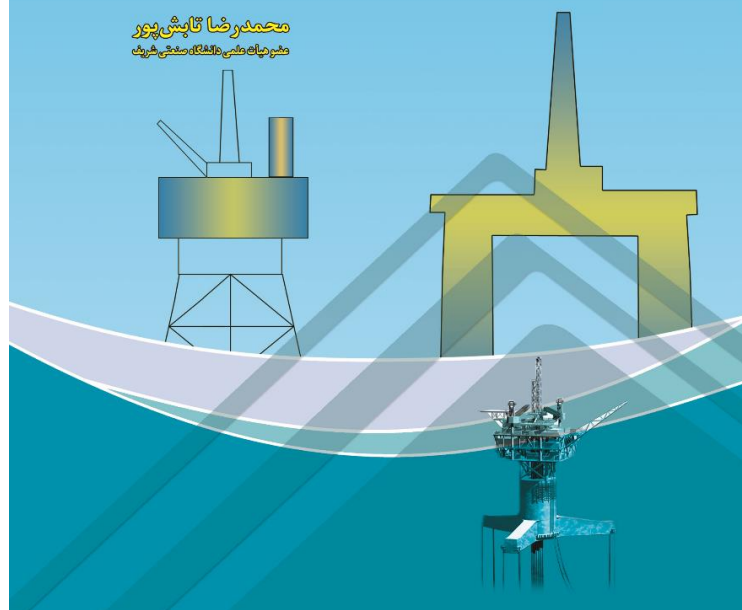
دستنامه سازه‌های دریایی ①



مؤسسه انتشارات علمی
دانشگاه صنعتی شریف

سازه‌های فراساحلی

محمدرضا تائیش پور
مهندس ارشد مهندسی عمران، مهندس شریف



فصل چهارم کتاب سازه های فراساحلی

برای مثال، احتمال آنکه ارتفاع موج، بزرگتر از H_i باشد مساوی است با:

$$P(H_i) = 1 - \int_0^{H_i} p(H_i) dH = e^{\frac{-H_i^2}{\bar{H}^2}}$$

یعنی از میان n موج، تعداد $ne^{\frac{-H_i^2}{\bar{H}^2}}$ موج، از H_i بزرگتر هستند.
میانگین ارتفاع موج به صورت زیر است:

$$H_0 = 0.89 \sqrt{\bar{H}^2}$$

میانگین یک-سوم مرتفع‌ترین امواج مساوی است با:

$$H_{\frac{1}{3}} = 1.41 \sqrt{\bar{H}^2}$$

میانگین یک-دهم مرتفع‌ترین امواج به صورت زیر است:

$$H_{\frac{1}{10}} = 1.80 \sqrt{\bar{H}^2}$$

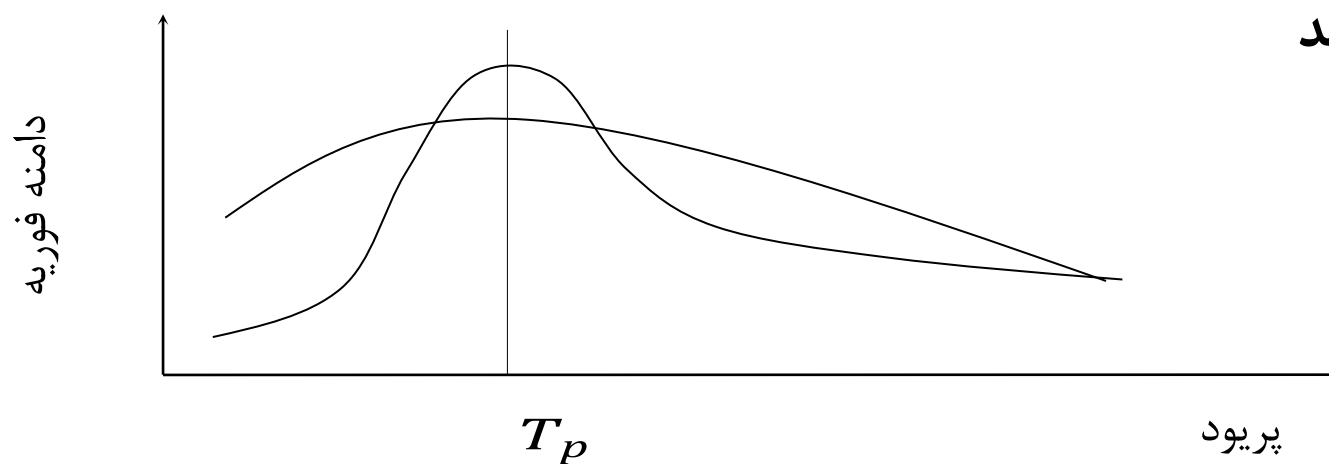
توزیع رایلی از نظر ریاضی برای طیف‌های باریک باند کاربرد دارد. این توزیع دارای قله در یک باریکه بوده و اغلب انرژی در یک بازه باریک از فرکانس توزیع می‌شود.

$\bar{H}^2$ میانگین مربعات یا همان واریانس است که مساوی است با سطح زیر منحنی چگالی طیفی

مثال ۱.۴

۱.۲.۲.۱.۱۰ پریود غالب

۲.۲.۲.۱.۱۰ پهنای باند



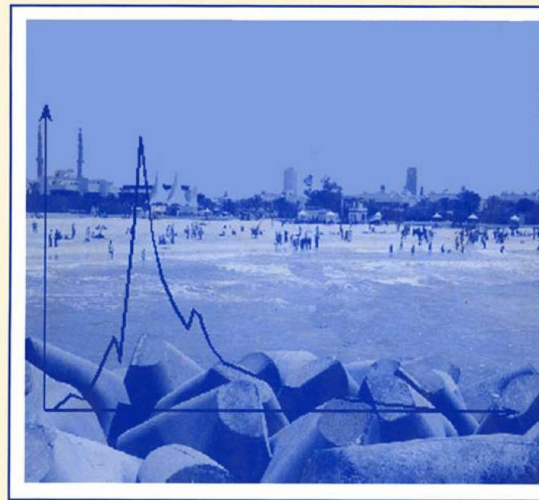
شکل ۱۳.۱۰ طیف فوری مربوط به دو حرکت متفاوت دارای محتوای فرکانسی متفاوت و پریود غالب یکسان

تحليل آماری و تصادفی کوتاه-مدت امواج دریا

مرجع اصلی (فصل سوم)

Advanced Series on Ocean Engineering — Volume 16

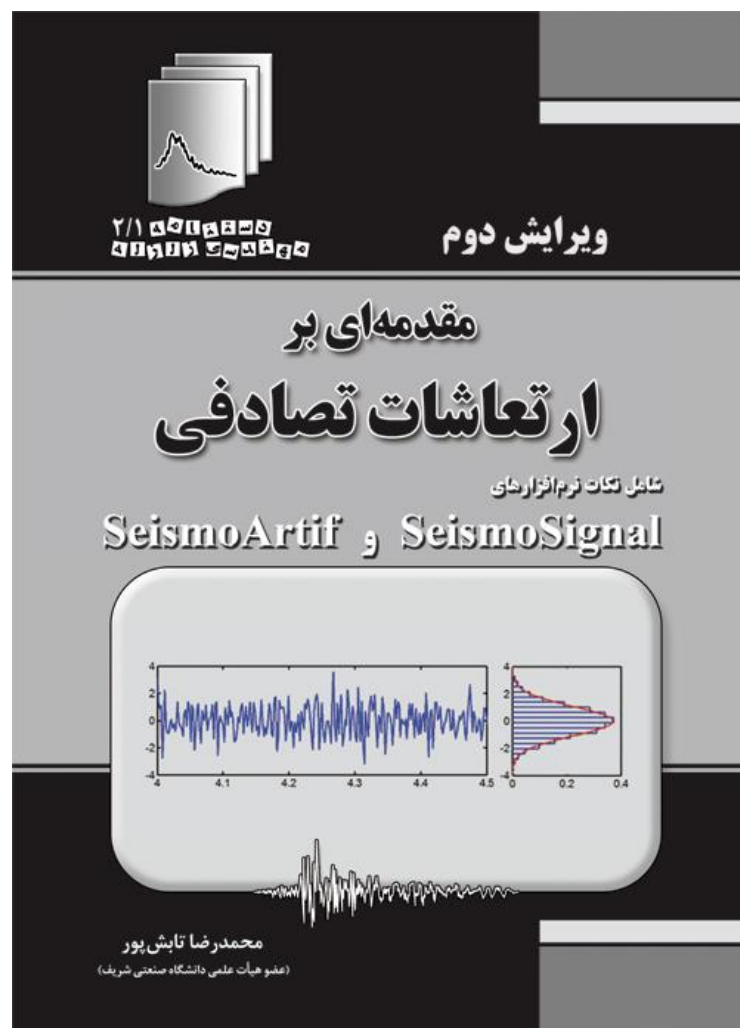
INTRODUCTION TO COASTAL ENGINEERING AND MANAGEMENT



J. William Kamphuis

World Scientific

مرجع کمکی (خلاصه کتاب زیر):



تحلیل آماری و تصادفی کوتاه-مدت امواج دریا

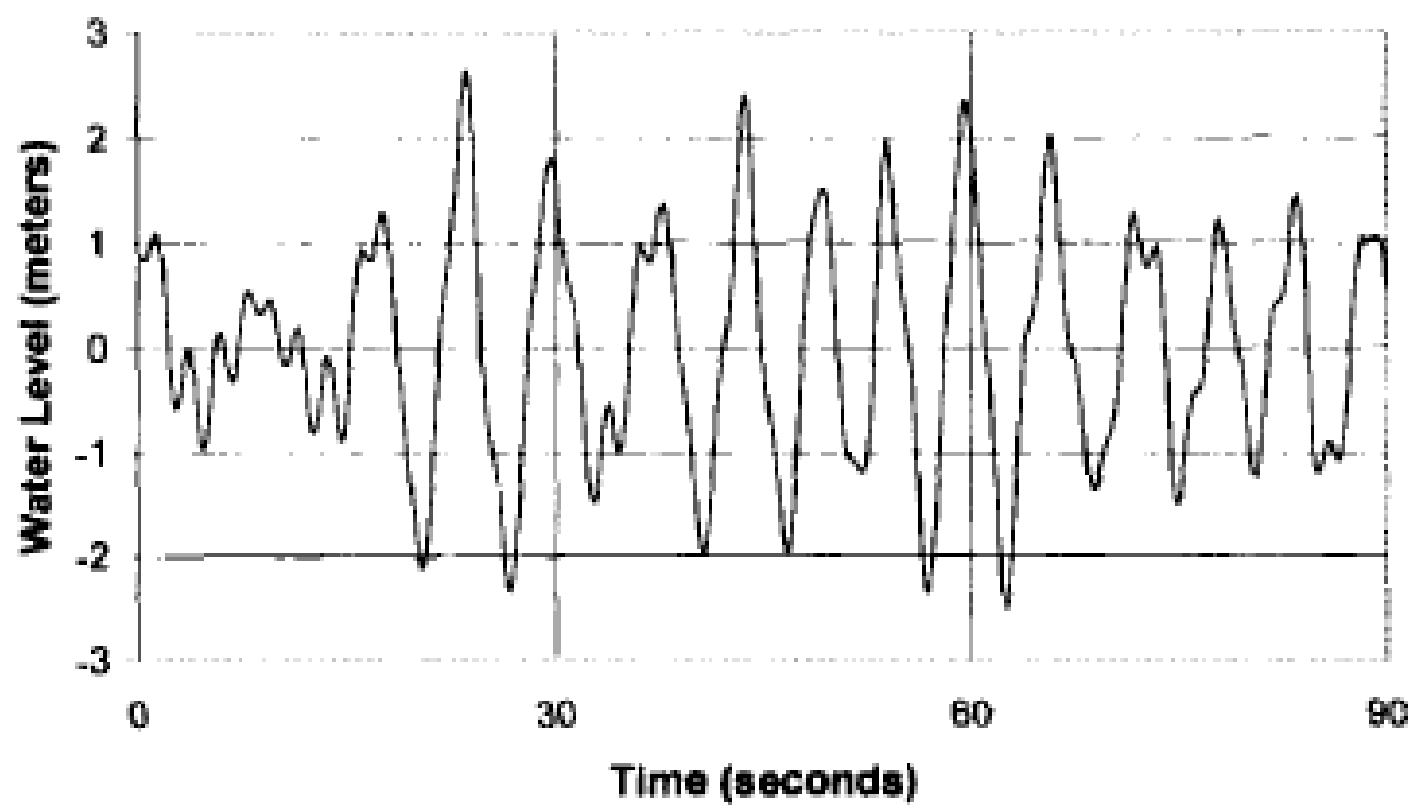
۱.۳ مقدمه

در تحلیل داده های موج، تمیز دادن بین تحلیل داده های موج کوتاه-مدت و بلند-مدت بسیار مهم است. منظور از کوتاه-مدت و بلند-مدت در بحث امواج دریایی چیست؟

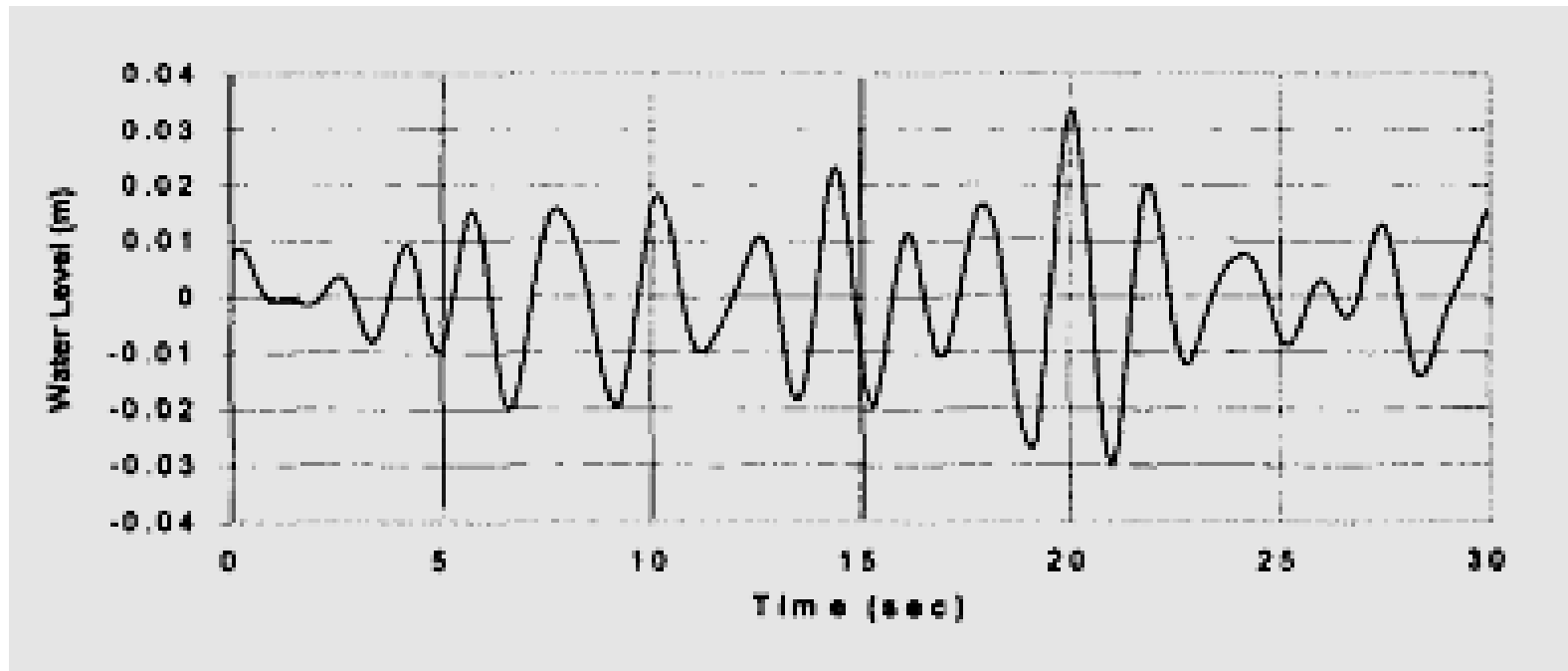
قطار موج: تاریخچه زمانی ارتفاع تراز آب در یک نقطه مشخص بر حسب زمان.

تحلیل کوتاه مدت موج:

عبارت است از تحلیل امواج که مربوط به یک قطار موج بوده و یا در یک طوفان مشخص در بازه زمانی معلومی (چند ثانیه تا چند ساعت) رخ داده است. در شکل های ۳.۲ و ۱.۳ دو نمونه ارائه شده است.



شکل ۳.۲ امواج تولید شده به صورت محلی

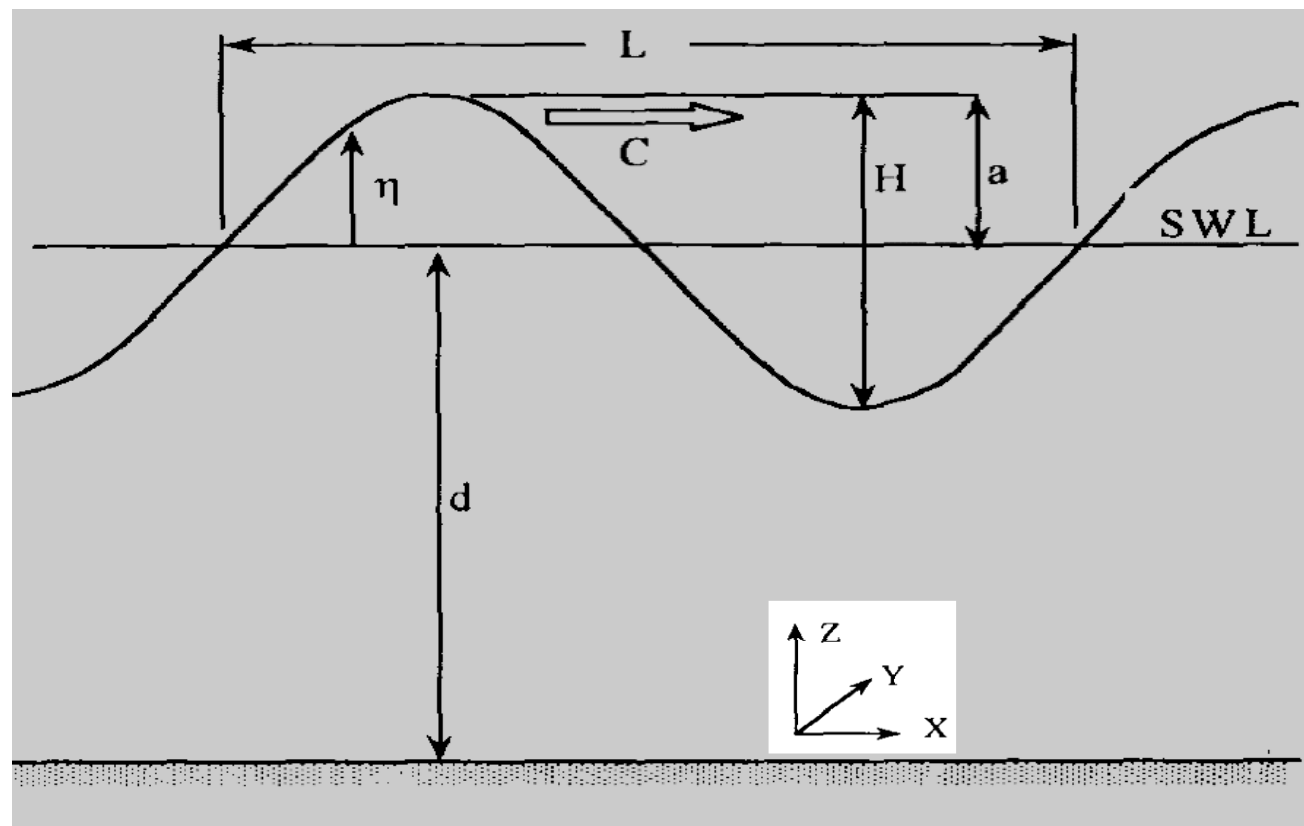


شکل ۱.۳ رکورد سطح آب

تحلیل بلند-مدت موج:

عبارت است از استخراج توزیع‌های آماری (میانگین، واریانس، دوره بازگشت، احتمال رخداد سالانه) که چندین سال را پوشش می‌دهند. یادآوری می‌کند که پارامترهای مهم در توزیع‌های آماری (چگالی احتمال) عبارتند از میانگین و واریانس.

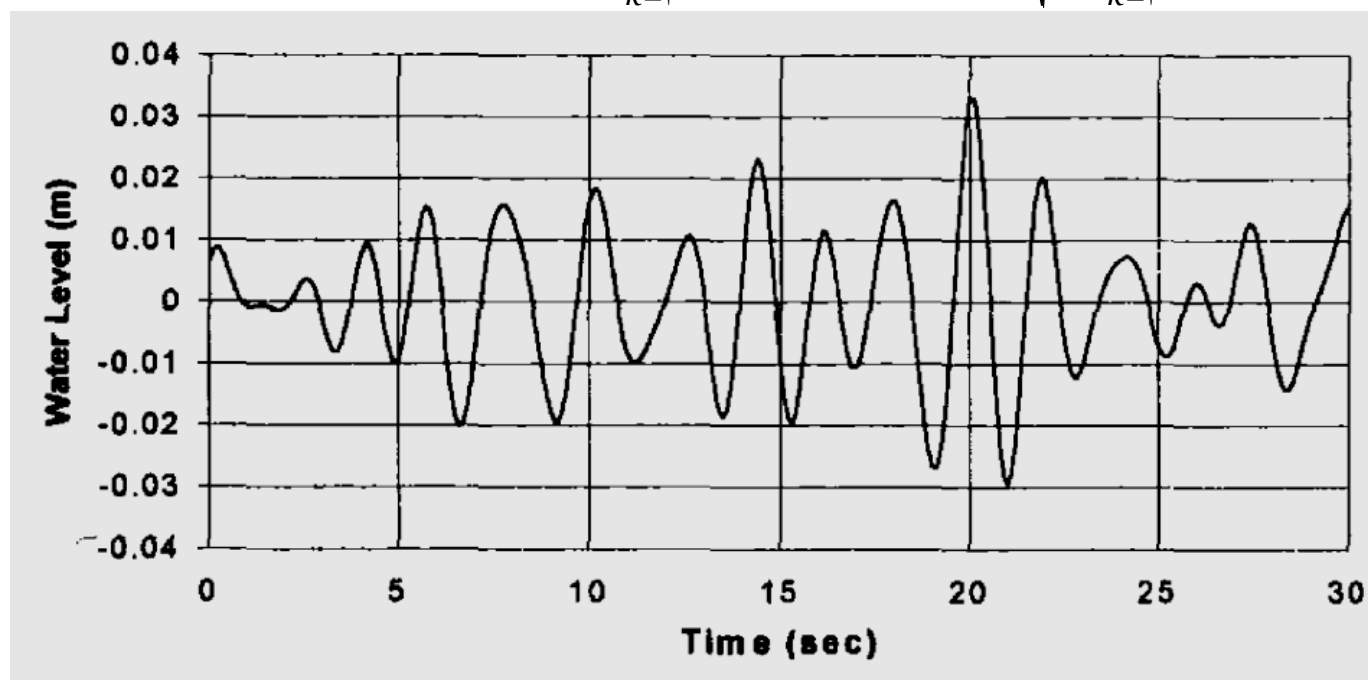
در خصوص توصیف رکوردهای کوتاه-مدت باید یک سری فرضیات ساده‌کننده انجام شود و در این زمینه تحقیقات خوبی انجام شده است (گودا ۱۹۷۰-۱۹۸۵). از آنجا که سائزهای متعددی از امواج در هر رکورد موج وجود دارد باید ابتدا آنها را قبل از انجام تحلیل‌های آماری مرتب (سورت) کنیم.

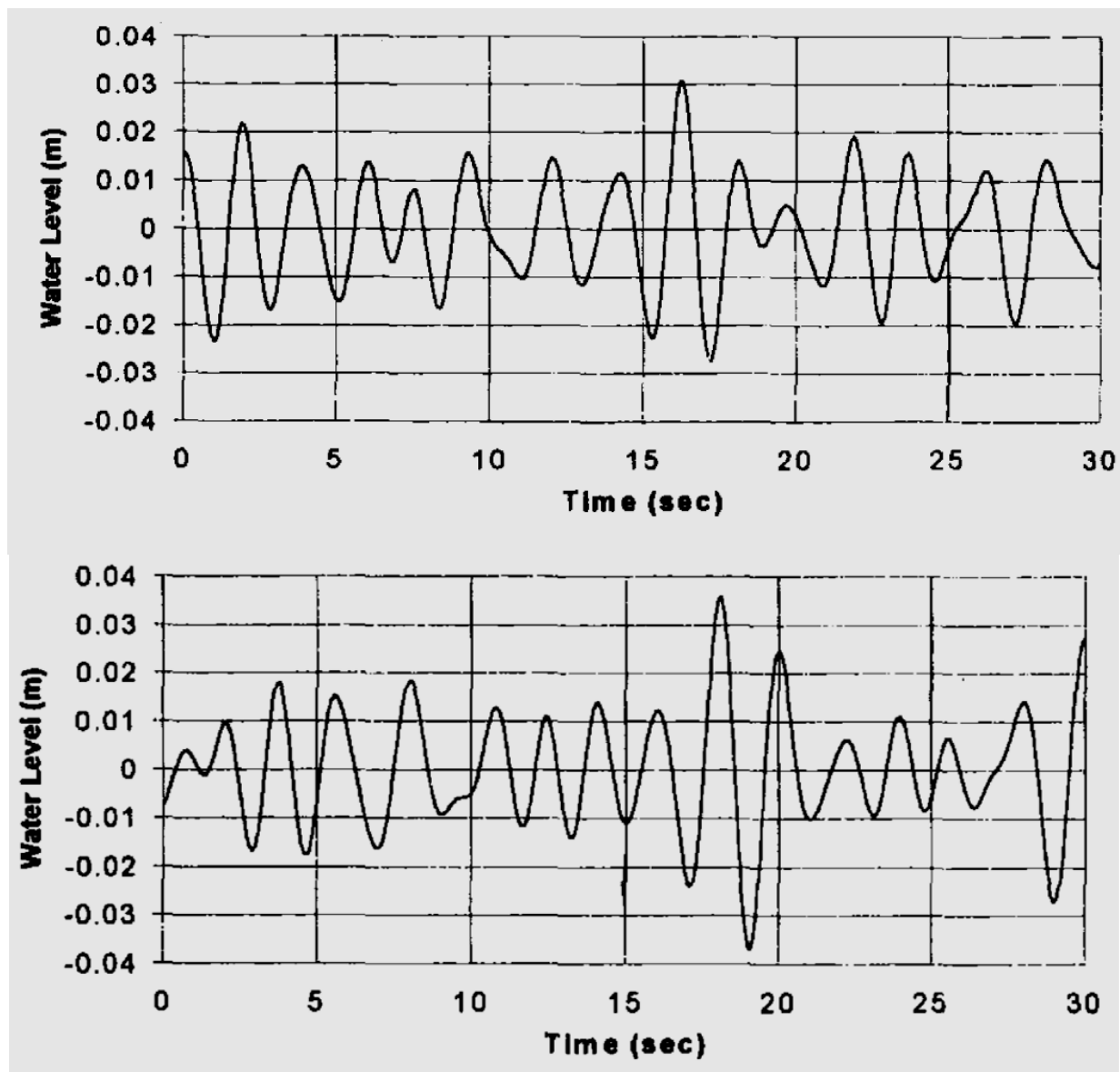


اگر یک مجموعه با K رکورد ثبت کنیم که شامل $z_k(t)$ باشد ($k = 1, 2, 3, \dots, K$) آن را Ensemble (مجموعه چند رکود) می‌نامیم.

اکنون می‌توانیم برای تمام این رکوردها در زمان مشخص $t = j\Delta t$ پارامترهای آماری یعنی میانگین چند رکورد ($\bar{z}_j$) و انحراف معیار چند رکورد (σ_j) را محاسبه کنیم:

$$\bar{z}_j = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K z_{k,j} \quad \sigma_j = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (z_{k,j} - \bar{z}_j)^2} \quad 1.3$$





شکل ۲.۳ سه رکورد مانا و ارگودیکاز سطح آب دریا

چولگی (گشتاور مرتبه سوم) و کشیدگی (گشتاور مرتبه چهارم) مجموعه چند رکورد نیز قابل تعیین هستند. اگر هیچ یک از مجموعه چند رکوردی پارامترها با زمان تغییر نکنند، فرآیند مانا نامیده می‌شود و اگر تنها میانگین و انحراف معیار آن‌ها ثابت باشد، سیستم بک سیستم ضعیف مانا می‌باشد. اگر میانگین هر رکورد تولید شده $Z_k(t)$ با میانگین مجموعه چند رکورد Z_k برابر باشد به گونه‌ای که

$$\overline{Z_k} = \frac{1}{K} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^N Z_{k,j} \quad \text{و} \quad \overline{Z_k(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Z_j \quad ۲.۳$$

فرآیند ارگودیک نامیده می‌شود. برای مجموعه چند رکورد در شکل ۲.۳، فرآیند مانا و ارگودیک است. مانا است چرا که $\overline{Z_k}$ و σ_j ، با زمان افزایش نمی‌یابند و ارگودیک است چرا که $\overline{Z_k(t)}$ برای هر رکورد تولیدی با میانگین مجموعه چند رکورد $\overline{Z_k}$ برابر است.

این در عمل به چه معنی است؟ یک رکورد سطح آب همواره تنها یک نمونه واقعی از فرآیند بوده که مورد بررسی قرار می‌گیرد. نمونه دیگری وجود ندارد چرا که موقعیتی کاملاً مشابه دیگر قابل شبیه‌سازی نخواهد بود. بنابراین، هر رکورد تنها یک تخمین از فرآیند است. یک فرآیند مانای ضعیف تنها زمانی که $\overline{Z}$ و σ با زمان تغییر نکنند از این تک رکورد موج قابل استنتاج است (هیچ روندی در سطح آب میانگین و ارتفاع موج وجود ندارد). در نهایت، تنها با یک نمونه، هیچگاه نمی‌توان نشان داد که فرآیند ارگودیک است، تنها بایستی فرض کرد که فرآیند ارگودیک است همانطور که در کینزمن (۱۹۶۵) بحث شده است.

۲.۳ توزیع ارتفاع موج کوتاه-مدت

قضیه حد مرکزی بیان می کند که تابع چگالی احتمال برای مجموعه‌ای از متغیرهای مستقل، **گوسی** بوده که به معنی **قابل توصیف بودن** $p(\eta)$ به وسیله یک توزیع نرمال است. رفتار کلی $p(\eta)$ به وسیله میانگین آن، $\bar{\eta}$ ، انحراف معیار آن، σ و پارامترهای آماری دیگری همچون **چولگی** و **کشیدگی** خلاصه می شود. توزیع دو پارامتری نرمال $p(\eta)$ به وسیله $\bar{\eta}$ و σ تعریف می شود. با این حال، با فرض $\bar{\eta} = 0$ خواهیم داشت:

$$p(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-\eta^2}{2\sigma^2}\right] \quad ۳.۳$$

که σ انحراف معیار $\eta(t)$ بوده و به صورت جذر واریانس η تعریف می شود.

$$\sigma^2 = \overline{\eta^2} = \lim_{t_R \rightarrow \infty} \frac{1}{t_R} \int_{t=0}^{t=t_R} \eta^2 dt = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \eta_j^2 \quad ۴.۳$$

$$t_R = N / \Delta t$$

اگر تمامی فرکانس‌های امواج در یک محدوده فرکانسی باریک قرار داشته باشند (اگر دوره تناوب امواج خیلی تغییر نکنند)، به صورت تئوری می توان نشان داد که تابع چگالی احتمال بیشینه‌های لحظه‌ای سطح آب (همان دامنه موج) به صورت زیر تعریف می شود (توزیع رایلی):

$$p(\eta_{\max}) = \frac{\eta_{\max}}{\sigma^2} \exp\left[\frac{-\eta_{\max}^2}{2\sigma^2}\right] \quad ۵.۳$$

اگر فرض شود که برای امواج با محدوده فرکانسی باریک، ارتفاع موج H با $\eta_{\max}$ برابر بوده، آنگاه تابع چگالی احتمال برای H به صورت زیر به دست می‌آید:

$$p(H) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{H}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{H^2}{2\sigma^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{H}{\sigma_{\eta}^2} \exp\left[-\frac{H^2}{2\sigma_{\eta}^2}\right] \quad 6.3$$

به عدد ۸ در معادله بالا توجه شود،

$$H = \eta_{\max} \Rightarrow \sigma_H^2 = 2^2 \sigma_{\eta}^2 = 4\sigma_{\eta}^2$$

و در مخرج تابع نمایی هم عدد ۲ وجود دارد: $2\sigma^2$

حاصل ضرب این دو عدد مساوی است با ۸.

ضمناً توجه شود که: $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

روابط ۵.۳ و ۶.۳ به عنوان توزیع رایلی شناخته می‌شوند. این توزیع در شکل ۳.۳ نشان داده شده است.

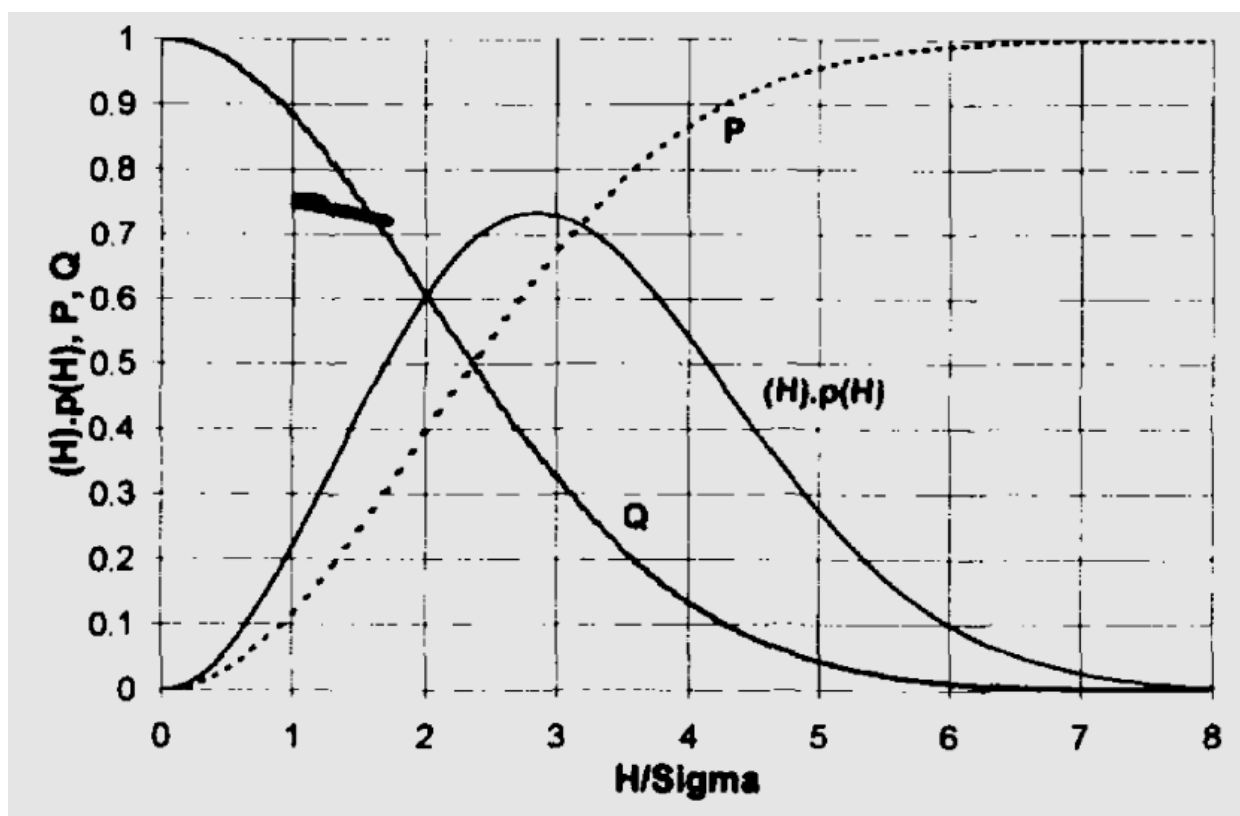
برای تعیین تابع توزیع تجمعی ارتفاع امواج، با انتگرال‌گیری از توزیع رایلی احتمال اینکه هر تک ارتفاع موج H' بزرگتر از یک ارتفاع موج مشخص H نباشد به صورت زیر بیان می‌شود:

$$p(H' < H) = \int_0^H p(H) dH = 1 - \exp\left[-\frac{H^2}{2\sigma^2}\right] \quad 7.3$$

بر این اساس، احتمال فراگذشت، احتمالی است که هر تک ارتفاع موج H' از یک ارتفاع موج مشخص H بیشتر شود. این مقدار به صورت زیر قابل تعریف است.

$$Q(H' > H) = 1 - p(H' < H) = \exp\left[\frac{-H^2}{\lambda \sigma^2}\right] \quad ۸.۳$$

توابع Q و P نیز در شکل ۳.۳ نشان داده شده‌اند. تحقیقات نشان داده که به جز در آب‌های کم عمق زمانی که شکست موج اتفاق می‌افتد، توزیع امواج در تمامی نقاط به توزیع رایلی بسیار نزدیک است.



شکل ۳.۳ توزیع رایلی

ارتفاع موج با یک احتمال فراگذشت Q ، به صورت رابطه ۸.۳ قابل بیان است:

$$Q = \exp\left[\frac{-H^2}{\lambda \sigma^2}\right] \Rightarrow \ln Q = \frac{-H^2}{\lambda \sigma^2} \Rightarrow$$

$$H_Q = \sqrt{\lambda \sigma^2 (-\ln Q)} = \sqrt{\lambda \sigma^2 \ln\left(\frac{1}{Q}\right)} = \sigma \sqrt{2 \ln\left(\frac{1}{Q}\right)} \quad 9.3$$

برای تعیین $\bar{H}_Q$ ، میانگین ارتفاع تمامی امواج که بزرگتر از H_Q در یک رکورد یا طوفان:

$$\bar{H}_Q = \frac{\int_{H_Q}^{\infty} H / p(H) dH}{Q} \quad 10.3$$

رابطه ۹.۳ و ارزیابی عددی رابطه ۱۰.۳ منجر به نتایج جدول ۱۰.۳ می شود که در آن تعدادی از تعاریف معمول برای ارتفاع موج براساس $\sigma = rms_{\eta}$ آمده است.

از میان تمامی این تعاریف، ارتفاع موج شاخص (H_s) مهمترین پارامتر است.

این پارامتر به صورت «میانگین یک-سوم» بالایی ارتفاع امواج، $\bar{H}_{1/3}$ تعریف می شود.

بر مبنای ارتفاع موج شاخص، چهار تعریف مهم زیر معمول است:

$$\bar{H}_{0.1} = 1.27 H_s; \quad \bar{H}_{0.01} = 1.67 H_s \quad 11.3$$

$$\bar{H} = 0.63 H_s; \quad H_{rms} = 0.707 H_s$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{H}_{\circ/\lambda} = \rho/\rho \vee \sigma \\ H_s = \rho \sigma \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{H}_{\circ/\lambda} = \frac{\rho/\rho \vee}{\rho} H_s = \backslash/\rho \vee H_s$$

نماد	توصیف	مقدار بر حسب σ_η	مقدار بر حسب H_s
$\bar{H}_{0.1}$	میانگین ۱٪ بالای امواج	۶/۶۷۵	۱/۶۷
$H_{0.1}$	ارتفاع موجی که ۱٪ امواج از آن عبور کرده‌اند	۶/۰۷۵	۱/۵۲
$\bar{H}_{0.2}$	میانگین ۲٪ بالای امواج	۶/۲۳۵	۱/۵۶
$H_{0.2}$	ارتفاع موجی که ۲٪ امواج از آن عبور کرده‌اند	۵/۵۹۵	۱/۴
$\bar{H}_{0.1}$	میانگین ۱۰٪ بالای امواج	۵/۰۹۵	۱/۲۷
$H_{0.1}$	ارتفاع موجی که ۱۰٪ امواج از آن عبور کرده‌اند	۴/۲۹۵	۱/۰۷
$H_s = \bar{H}_{1/3}$	ارتفاع موج شاخص (میانگین ۱/۳ بالای امواج)	۴۵	۱/۰
$\bar{H}$	میانگین ارتفاع موج	$\sqrt{2}\pi\sigma$	۰/۶۳
$H_{0.5}$	میانه ارتفاع موج	۲/۳۵۵	۰/۵۹
H_{mode}	محتمل‌ترین ارتفاع موج	۲۵	۰/۵
H_{rms}	$\frac{\sqrt{H_1^2 + H_2^2 + \dots + H_N^2}}{N}$	$2\sqrt{2}\sigma$	۰/۷

نکته:

$$H_{\text{rms}} = \sqrt{2} \sigma \Rightarrow H_{\text{rms}}^2 = (\sqrt{2})^2 \sigma^2 = 2 \sigma^2$$

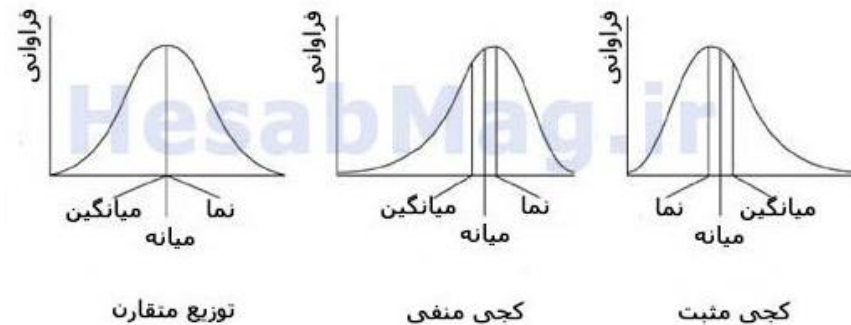
$$\sigma^2 = \frac{1}{N} H_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{N} \frac{H_1^2 + H_2^2 + \dots + H_N^2}{N}$$

$$\rho g \sigma^2 = \frac{1}{N} H_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{N} \rho g \frac{H_1^2 + H_2^2 + \dots + H_N^2}{N} = E$$

$$E = \rho g \sigma^2 = \frac{1}{N} \rho g H_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{N} \rho g H_s^2$$

یعنی واریانس (طیف دامنه موج) ضرب در ρg میشود (طیف) انرژی.

یعنی طیف انرژی (E) و طیف مربع دامنه به اندازه ρg با هم تفاوت ابعادی دارند.



Symbol	Description	Value
$\bar{H}_{01}$	Average of highest 1% of the waves	6.67σ
H_{01}	Height, exceeded by 1% of the waves	6.07σ
$\bar{H}_{02}$	Average of the highest 2% of the waves	6.23σ
H_{02}	Height, exceeded by 2% of the waves	5.59σ
$\bar{H}_{0.1}$	Average of highest 10% of the waves	5.09σ
$H_{0.1}$	Height exceeded by 10% of the waves	4.29σ
$H_s = \bar{H}_{1/3}$	Significant wave height (Average height of the highest 1/3 of the waves)	4.0σ
$\bar{H}$	Average wave height	$\sqrt{2\pi} \sigma$
$H_{2.5}$	Median wave height	2.35σ
H_{mode}	Most probable wave height	2.0σ
H_{rms}	$\frac{\sqrt{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + \dots}}{N}$	$2\sqrt{2} \sigma$

اینها RMS_η هستند نه RMS_H

$$E = \rho g \sigma^2 = \frac{1}{8} \rho g H_{rms}^2$$

جمله بسیار مهم:

ارتفاع موج rms ارتفاع موج ثابتی است که نشان دهنده کل انرژی تمامی توزیع ارتفاع امواج است.

بنابراین، احتمال فراگذشت برای میانگین ارتفاع امواج با استفاده از مقادیر آن‌ها در جدول ۱.۳ و رابطه ۸.۳ قابل محاسبه است. نتایج این محاسبه در جدول ۲.۳ نشان داده شده است.

جدول ۲.۳ احتمال فراگذشت از ارتفاع امواج متوسط

H	$\bar{H}_{0.01}$	$\bar{H}_{0.1}$	H_s	$\bar{H}$	H_{mode}
$Q(H' > H)$	0.004	0.039	0.136	0.456	0.606

$$p(\eta_{\max}) = \frac{\eta_{\max}}{\sigma^2} \exp\left[\frac{-\eta_{\max}^2}{2\sigma^2}\right] \quad ۵.۳$$

$$p(H) = \frac{1}{\sigma^2} \frac{H}{\sigma^2} \exp\left[\frac{-H^2}{\sigma^2}\right] = \frac{1}{\sigma^2} \frac{H}{\sigma_\eta^2} \exp\left[\frac{-H^2}{\sigma_\eta^2}\right] \quad ۶.۳$$

از معادله بالا مشتق می‌گیریم نسبت به H :

$$\frac{dp}{dH} = \left(\frac{1}{\sigma_\eta^2} \frac{1}{\sigma_\eta^2}\right) \exp\left[\frac{-H^2}{\sigma_\eta^2}\right] + \left(\frac{1}{\sigma_\eta^2} \frac{H}{\sigma_\eta^2}\right) \left(\frac{-2H}{\sigma_\eta^2} \exp\left[\frac{-H^2}{\sigma_\eta^2}\right]\right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{\sigma_\eta^2} \frac{1}{\sigma_\eta^2}\right) + \left(\frac{1}{\sigma_\eta^2} \frac{H}{\sigma_\eta^2}\right) \left(\frac{-2H}{\sigma_\eta^2}\right) = 0$$

$$2H^2 = \sigma_\eta^2$$

$$H^2 = \frac{\sigma_\eta^2}{2}$$

$$H = \frac{\sigma_\eta}{\sqrt{2}}$$

اکنون $H = 2\sigma_\eta$ را در تابع زیر قرار می دهیم:

$$Q(H' > H) = 1 - p(H' < H) = \exp\left[\frac{-H^2}{8\sigma^2}\right] \quad ۸.۳$$

$$Q(H' > H) = 1 - p(H' < H) = \exp\left[\frac{-4\sigma^2}{8\sigma^2}\right] = e^{-0.5} = 0.606$$

مثال بعدی:

$$H_s = 4\sigma_\eta$$

$$Q(H' > H) = 1 - p(H' < H) = \exp\left[\frac{-16\sigma^2}{8\sigma^2}\right] = e^{-2} = 0.136$$

مقدار مورد انتظار از موج حداکثر در یک قطار موج با N_w تعداد موج با جایگذاری $Q = 1/N_w$ در رابطه ۹.۳ قابل محاسبه است. یک تخمین دقیق تر به صورت زیر است.

$$\mu\left[\frac{H_{\max}}{2\sigma}\right] = \sqrt{2 \ln N_w} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln N_w}} + O\left[(\ln N_w)^{-3/2}\right] \quad ۱۲.۳$$

که در آن $\mu(x)$ نشان دهنده "مقدار مورد انتظار x " و γ ثابت اولر ($= 0.5772$) و $O(x)$ نشان دهنده عبارات با مرتبه بالاتر از x (عبارات کوچک) هستند.

مثال ۳-۱- توزیع ارتفاع موج کوتاه مدت

برای تحلیل رکورد موج بایستی مانا باشد. بر همین اساس، معمول بوده که رکورد امواج برای بازه زمانی نسبتاً کوتاه (۲۰-۱۰ دقیقه) اندازه‌گیری شود. یک رکورد طولانی‌تر، پایا نخواهد بود چرا که تغییرات باد و سطح آب باعث تغییر موج می‌شوند. بنابراین معمول بوده که امواج هر سه ساعت برای ۱۵ دقیقه اندازه‌گیری شوند. متعاقباً، ۱۵ دقیقه رکورد نماینده کل فاصله زمانی سه ساعت است.

فرض کنید تحلیل چنین رکوردی نتایج زیر را به دست داده است:

$$\bar{T} = 10 \text{ sec and } \sigma = 1.0 \text{ m} \quad 13.3$$

می‌خواهیم ارتفاع موج شاخص H_s ، میانگین ارتفاع موج $\bar{H}$ ، میانگین ۱٪ بالای امواج $\bar{H}_{0.1}$ و بیشینه ارتفاع موج در رکورد را به دست آوریم. براساس، جدول ۱۰.۳ خواهیم داشت:

$$H_s = 4\sigma = 4.0 \text{ m}$$

$$\bar{H} = \sqrt{2\pi}\sigma = 2.5 \text{ m}$$

$$\bar{H}_{0.1} = 6.67\sigma = 6.7 \text{ m}$$

با $\bar{T} = 10 \text{ sec}$ ، میانگین تعداد امواج $N_w = 90$ در ۱۵ دقیقه و رابطه ۱۲.۳ خواهیم داشت

$$\mu \left[\frac{H_{\max}}{2\sigma} \right] = \sqrt{2 \ln(90)} + \frac{0.5772}{\sqrt{2 \ln(90)}} = 3.00 + 0.19 = 3.19 \text{ m} \quad 14.3$$

یا مقدار مورد انتظار $H_{\max} = (3.19)(2)(1.0) = 6.4 \text{ m}$. این مقدار $H_{\max}$ محاسبه شده را می‌توان با مقدار واقعی مقایسه کرد.

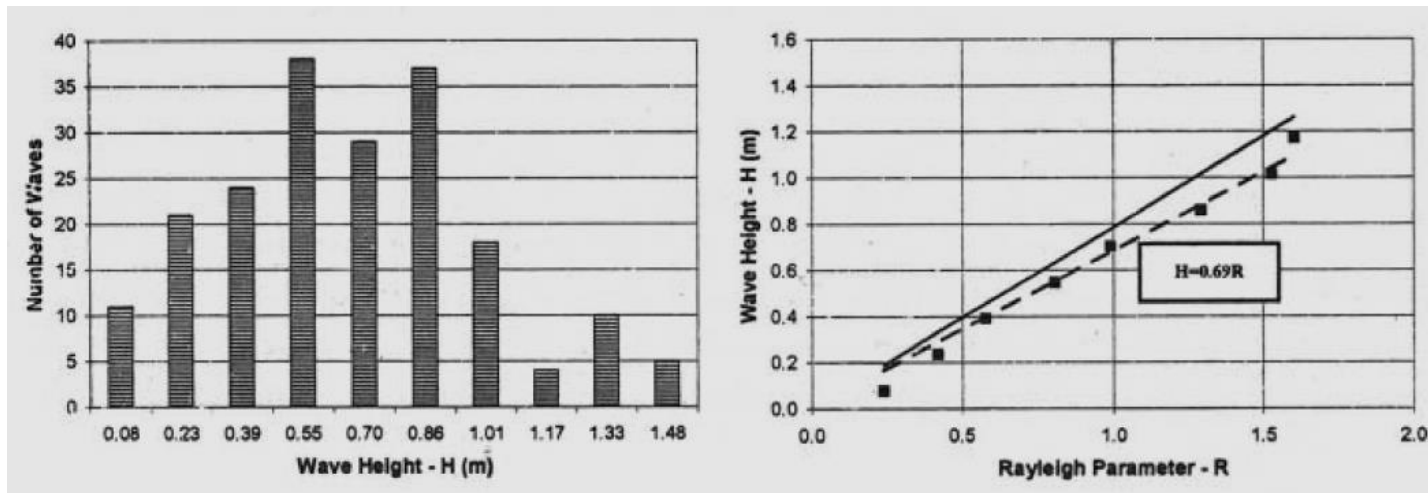
در صورتی که رکورد نماینده یک فاصله زمانی سه ساعت باشد، آنگاه $\bar{T}$ ، H_s ، $\bar{H}$ و $\bar{H}_{0.1}$ برای زمان سه ساعت نیز همان مقادیر بالا خواهد بود. با این حال، $H_{\max}$ بزرگتر از $6/4$ خواهد بود. برای یک رکورد فاصله زمانی سه ساعت، $N_w = 1080$ و رابطه 14.3 $H_{\max,3\text{hrs}} = 7.8m$ به دست می‌آید.

۳-۳- توزیع دوره تناوب موج

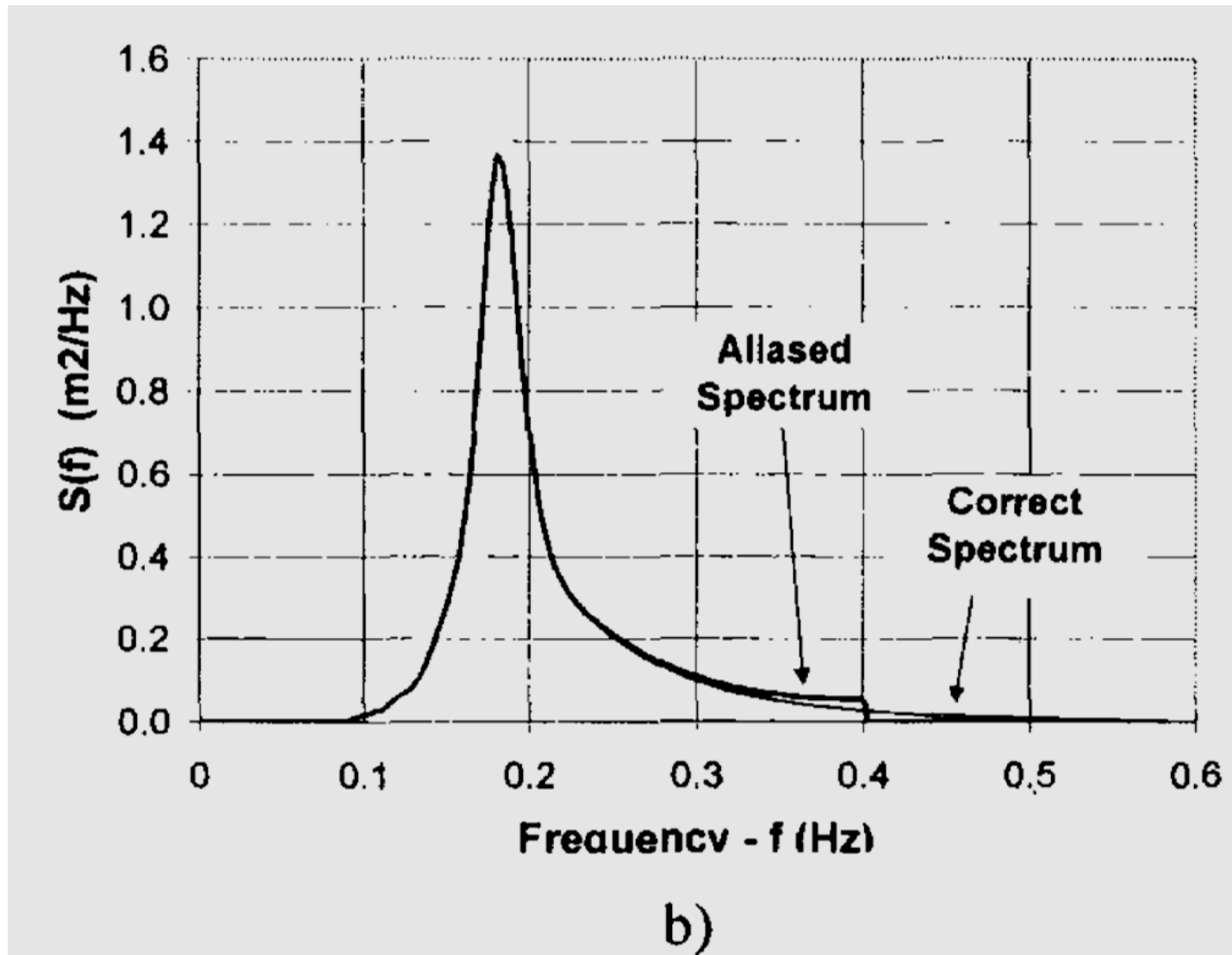
$$p(T) = 2.7 \frac{T^3}{\bar{T}^4} \exp \left[-0.675 \left(\frac{T}{\bar{T}} \right)^4 \right] \quad 15.3$$

$$Q(T' > T) = \int_T^\infty p(T) dt = \exp \left[-0.675 \left(\frac{T}{\bar{T}} \right)^4 \right] \quad 16.3$$

۳-۴- تحلیل زمانی یک رکورد موج



شکل ۷.۳ هیستوگرام و توزیع رایلی



شکل ۹.۳ طیف موج رکورد موج شکل ۵.۳

۳-۶- پارامترهای مستخرج از طیف موج

ممان‌های طیف موج به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$m_n = \int_{x=0}^{x=\infty} x^n S(x) dx, \quad x \equiv f$$

$$m_n = \int_{f=0}^{f=\infty} f^n S(f) df \quad ۳۹.۳$$

ممان صفرم به صورت زیر است ($n=0$):

$$m_0 = \int_{f=0}^{f=\infty} S(f) df = \sigma_f^2 \quad ۴۰.۳$$

با داشتن سطح زیر نمودار طیف موج و با فرض توزیع رایلی برای ارتفاع موج، پارامترهای مختلف ارتفاع موج ارائه شده در جدول ۱،۳ را می‌توان به صورت فرمول ۱۷،۳ یا ۱۱،۳ تقریب زد.

$$\bar{H}_{0.1} = 1/27 H_s; \quad \bar{H}_{0.01} = 1/67 H_s \quad ۱۱.۳$$

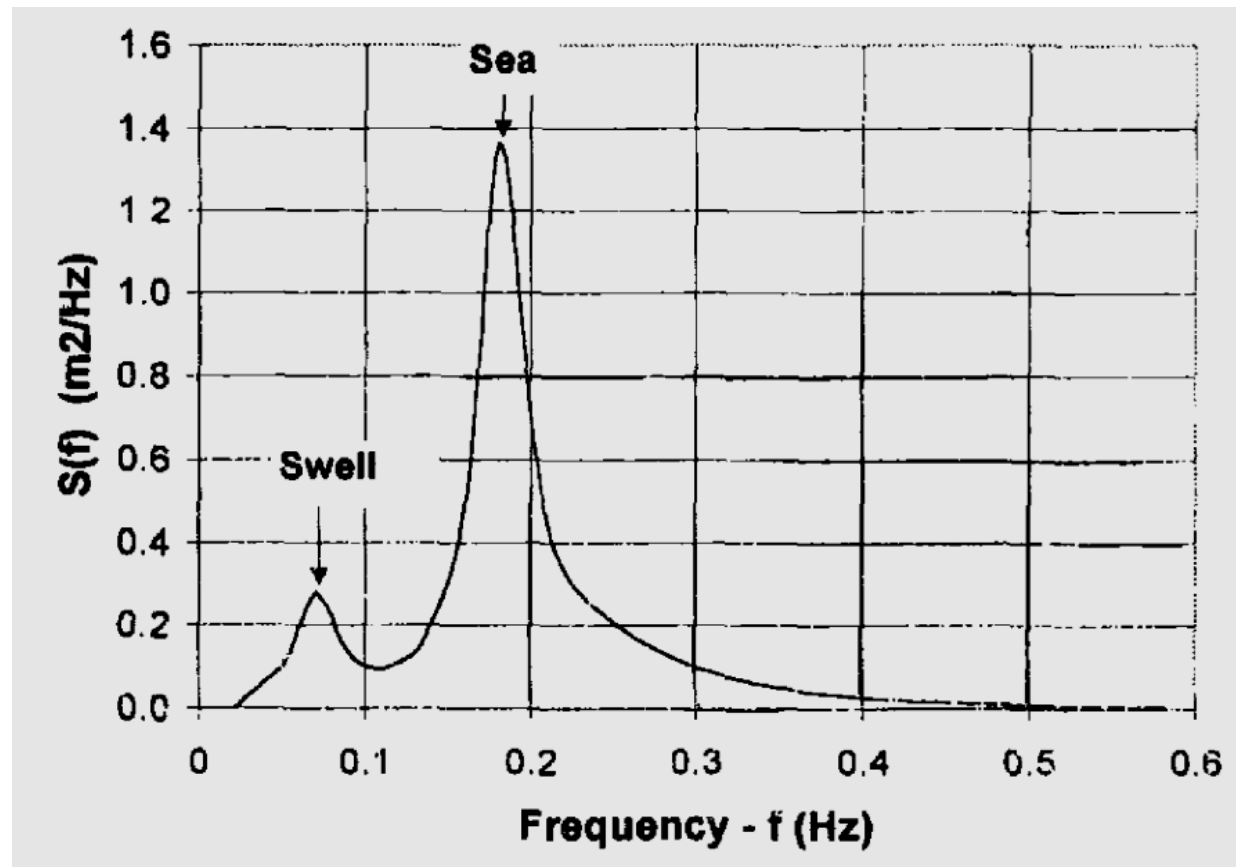
$$\bar{H} = 0.63 H_s; \quad H_{rms} = 0.707 H_s$$

تفاوت بین significant wave height با characteristic wave height

به منظور تمایز بین ارتفاع موج شاخص (significant) که از تحلیل تاریخچه زمانی به دست می‌آید و پارامتر معادل آن که از تحلیل فرکانسی به دست می‌آید، مورد دوم به نام ارتفاع موج مشخصه (characteristic) یا ارتفاع موج گشتاور صفرم شناخته می‌شود.

$$H_{ch} = H_{m_0} = 4\sigma_f \quad ۴۱.۳$$

$$H_{m_0} = (4)(\sigma/\pi\lambda) = 1/12 m$$



شکل ۱۰.۳ طیف موج با در نظر گرفتن امواج سوول دریا

$$\varepsilon^2 = 1 - \left\{ \frac{m_{\gamma}^2}{m_0 m_{\gamma}} \right\} \quad 42.3$$

$$T_p = \frac{\lambda}{f_p}$$

$$T_{\gamma} = \frac{m_{\circ}}{m_{\gamma}}; \quad T_{\gamma} = \sqrt{\frac{m_{\circ}}{m_{\gamma}}} \quad ۴۴.۳$$

$$\sigma_{\omega}^2 = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\omega=0}^{\omega=\infty} S(\omega) d\omega \quad ۴۵.۳$$

جدول ۳.۳ مقایسه نتایج روش‌ها

	Analysis		
	Initial	Zero Crossing	Frequency
σ (m)	$\sigma = 0.28$	$\sigma_z = 0.24$	$\sigma_f = 0.28$
N		197	
T (sec)		$\bar{T} = 6.1$	$T_p = 7.6$
			$T_1 = 6.4$
			$T_2 = 6.1$
H_s (m)	1.12	1.05	$H_{mo} = 1.11$
$\bar{H}$ (m)	0.70	0.68	0.70
H_{rms} (m)	0.79	0.76	0.79
$\bar{H}_{0.1}$ (m)	1.43	1.30	1.43
H_{max} (m)	1.92	1.56	1.92
ϵ^2			0.65

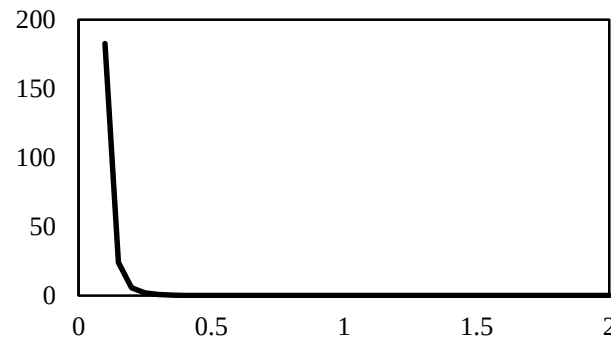
۳-۷- توصیف عمومی پارامتری طیف‌های موج

ابتدا فیلیپس (۱۹۵۸) فرض کرد که برای «بازه تعادل» ($f > f_p$) شکل طیفی $S(f)$ با f^{-5} متناسب است:

$$\Phi_P = \frac{\alpha_p}{2\pi^4} g^2 f^{-5} \propto f^{-5} \quad ۴۷.۳$$

که Φ_p تابع فیلیپس نامیده می‌شود و «ثابت فیلیپس» به صورت زیر است:

$$\alpha_p = ۰.۰۰۷۴ \quad ۴۸.۳$$



تابع فیلیپس

تعریف فیلتر:

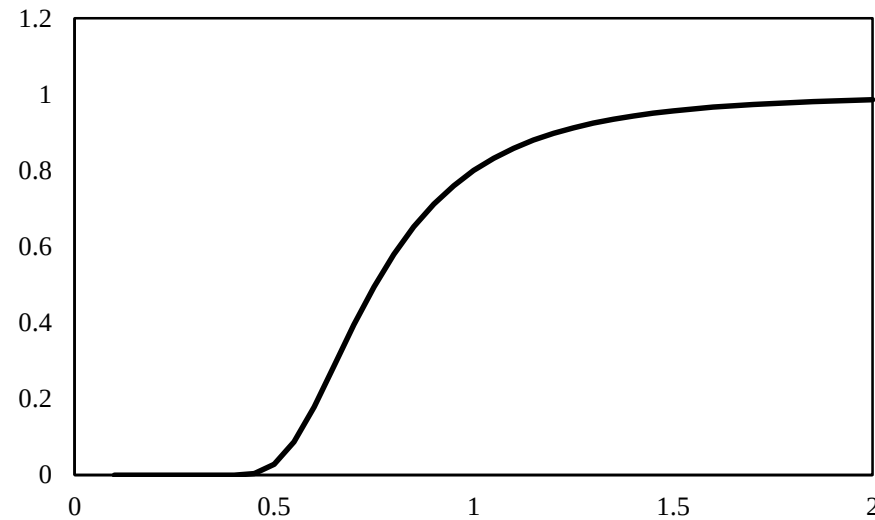
پیرسون-مسکوویچ (۱۹۶۴) یک فیلتر فرکانس پایین به معادله فیلیپس اضافه کردند:

$$S_{PM}(f) = \Phi_P \Phi_{PM} \quad ۴۹.۳$$

که

$$\Phi_{PM} = \exp \left[-\frac{\beta}{f^\beta} \right] = e^{-\frac{\beta}{f^\beta}}$$

۵۰.۳



فیلتر مورد استفاده توسط پیرسون مسکوویچ، اعمال شده به طیف فیلپس

بنابراین طیف پیرسون-مسکوویچ به صورت زیر است:

$$S_{PM}(f) = \frac{\alpha_{PM}}{(2\pi)^\beta} \frac{g^\beta}{f^\beta} e^{-\frac{\beta}{f^\beta}}$$

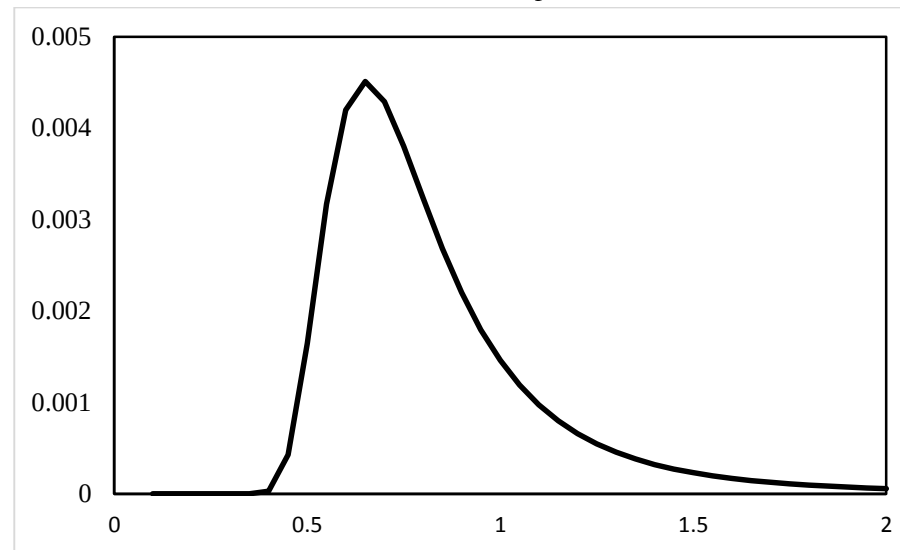
۵۱.۳

که در آن:

$$\beta = \frac{5}{4} f_p^4 \text{ و } \alpha_{PM} = 0.0081 \quad 52.3$$

اکنون می‌توان معادله 51.3 را به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$S_{PM}(f) = \frac{0.0005}{f^5} e^{-\frac{\beta}{f^4}}$$



طیف پیرسون مسکوچ

مقدار β به سرعت باد U مربوط است و می‌توان نوشت:

$$\beta = 0.74 \left(\frac{g}{2\pi U} \right)^4 \quad 53.3$$

طیف پیرسون-مسکوویچ برای دریای کاملاً توسعه یافته، معتبر است.

برای دریای در حال توسعه، هاسلمن و همکاران (۱۹۷۳) طیف جانسواپ را مطابق شکل ۱۱.۳ پیشنهاد دادند.

برای دریای در حال توسعه فیلتر Φ_J پیشنهاد شده است که با اعمال آن بر طیف پیرسون-مسکوویچ می‌توان نوشت:

$$S_J(f) = \Phi_P \cdot \Phi_{PM} \cdot \Phi_J \quad ۵۴.۳$$

که

$$\Phi_J = \gamma^{e^a} \quad ۵۵.۳$$

و

$$a = \left[\frac{-(f - f_P)^2}{2\delta^2 f_P^2} \right] \quad ۵۶.۳$$

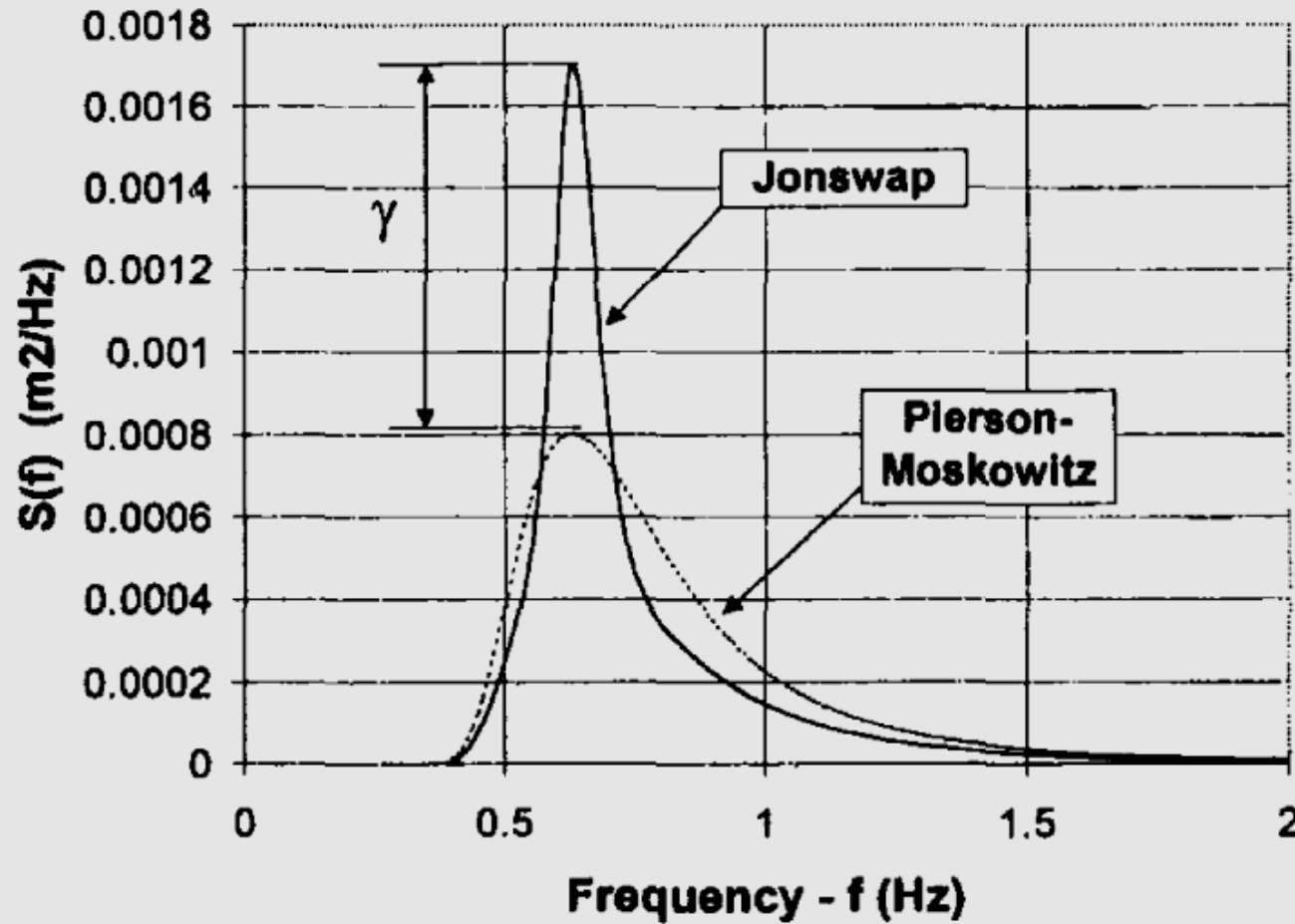
مقادیر نوعی برای δ به صورت زیر است:

$$\delta = ۰/۰۷ \quad \text{for } f \leq f_P \quad ۵۷.۳$$

$$\delta = ۰/۰۹ \quad \text{for } f > f_P$$

بنابراین می‌توان طیف جاسوآپ را به صورت زیر نوشت:

$$S_J(f) = \gamma^{e^a} S_{PM}(f) = \frac{\alpha_J g^2 \gamma^{e^a}}{(2\pi)^4 f^5} e^{-\frac{5}{4} \left(\frac{f}{f_p} \right)^4} \quad ۵۸.۳$$



شکل ۱۱.۳ طیف موج جانسواپ و پیرسون-موسکوویچ

$$\alpha_J = 0.076 \left(\frac{gF}{U^2} \right)^{-0.22} \quad 59.3$$

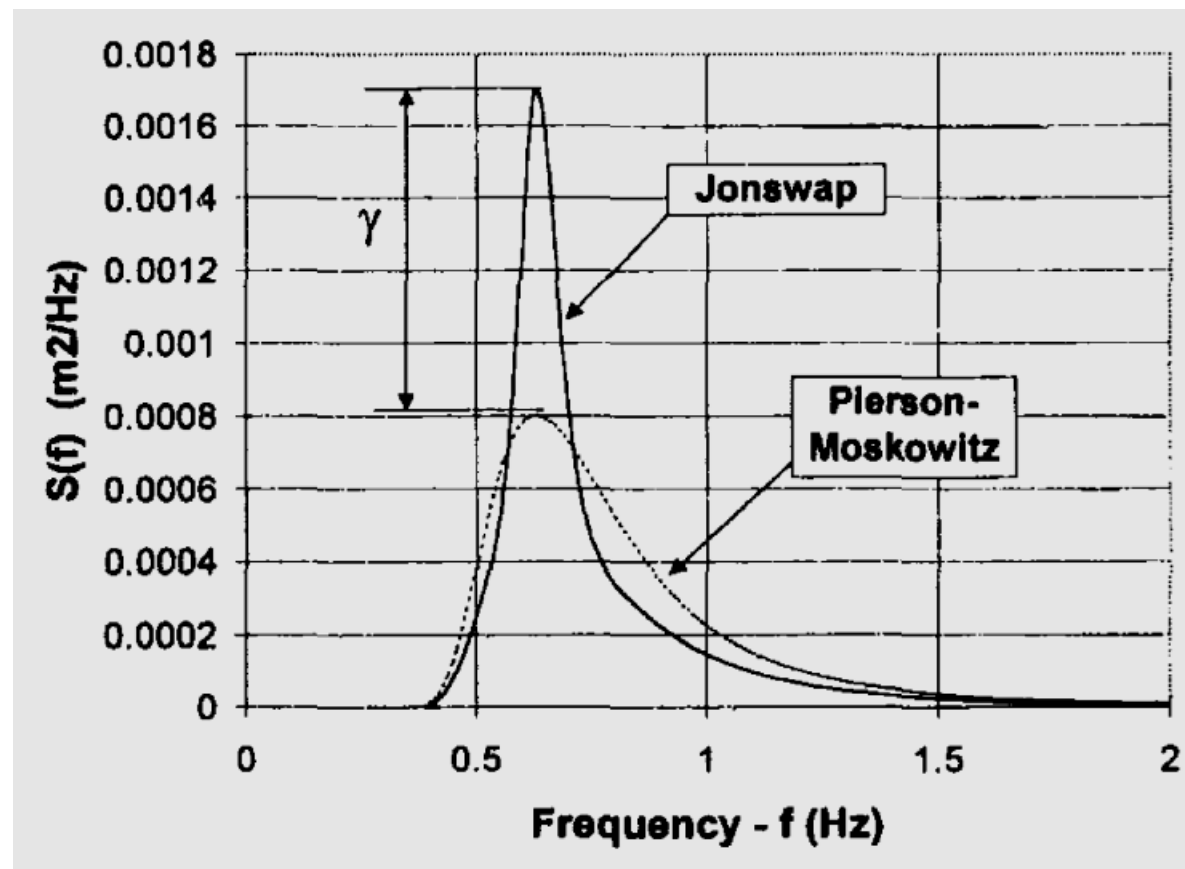
همچنین، میتسویاسو (۱۹۸۰) بیان می‌دارد که:

$$\alpha_M = 0.0817 \left(\frac{gF}{U_{10}^2} \right)^{-2/7} = \alpha_J \quad 60.3$$

و

$$f_p = 2.84 \left(\frac{gF}{U^2} \right)^{-0.33} \quad 61.3$$

$$\gamma = \frac{S_J(f_P)}{S_{PM}(f_P)} \quad 62.3$$



شکل ۱۱.۳ طیف موج جانسواپ و پیرسون-موسکوویچ

میتسویاسو رابطه زیر را برای γ پیشنهاد داد:

$$\gamma = 7.0 \left(\frac{gF}{U_{10}^2} \right)^{-1/7} \quad ۶۳.۳$$

مهم:

روند فوق نحوه استخراج معادله پارامتری طیف موج از روی طیف تعادل (فیلیپس) را تشریح می کند. می دانیم که امواج، تیزی محدودی دارند و بعد از رسیدن به یک تیزی مشخصی شکسته می شوند. این پدیده به عنوان اشباع شدگی طیفی می باشد. باوز و همکاران (۱۹۸۵) طیف جانسواپ را برای در نظر گرفتن اشباع شدگی طیفی اصلاح کردند و طیف TMA را پیشنهاد دادند:

$$S_{TMA}(f, d) = \Phi_P \cdot \Phi_{PM} \cdot \Phi_J \cdot \Phi_d \quad ۶۴.۳$$

که

$$\Phi_d = \frac{1}{2n} \tanh^2 \frac{\pi d}{L} \quad ۶۵.۳$$

مهم:

در آب عمیق مقدار Φ_d یک است. به عبارت دیگر، طیف جانسواپ محدودیت مربوط به تیزی موج در آب عمیق را در نظر می گیرد و با کمک معادله ۶۵.۳ طیف جانسواپ را به علت شکست موج در آب کم عمق اصلاح می کند.

۴.۴ طیف موج

۱.۴.۴ طیف نیومان

$$S(f) = \frac{2 \times 10^{-5} g^2}{f^6} \exp\left(-\frac{B}{f^2}\right)$$

۲.۴.۴ طیف برتشنايدر

$$S(f) = \frac{5 H_s^2}{16 f^5} \frac{1}{A^5} \exp\left(-\frac{5}{4} A^{-4}\right)$$

۳.۴.۴ طیف پيرسون - مسكويچ

$$S(f) = \frac{4 \times 10^{-3}}{16 \pi^4 f^5} \exp\left(-\frac{B}{f^4}\right)$$

۴.۴.۴ طیف جان سواب

$$S(f) = \frac{\alpha g^2}{16 \pi^4 f^5} \exp\left[-1/25 \left(\frac{f}{f_0}\right)^{-4}\right] \gamma^a$$

GENERATION AND ANALYSIS OF RANDOM WAVES

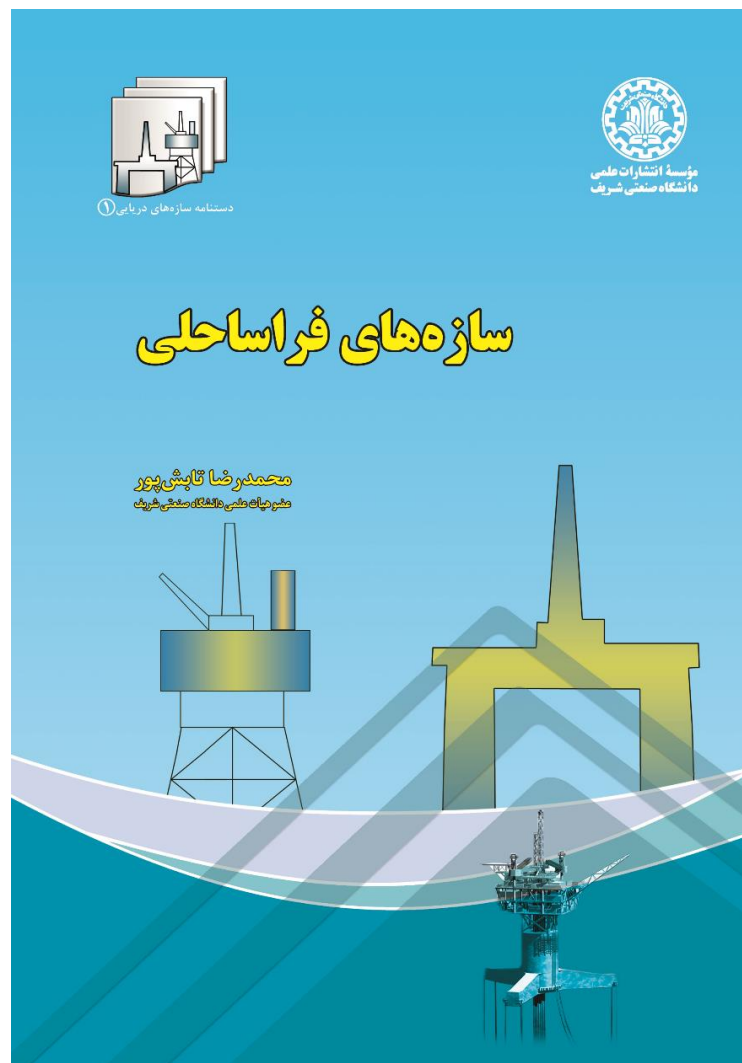
Zhou Liu and Peter Frigaard

3. udgave. januar 2001

Laboratoriet for Hydraulik og Havnebygning

Instituttet for Vand, Jord og Miljøteknik

Aalborg Universitet



فصل چهارم کتاب سازه های فراساحلی